УДК 532. 546

М.У.Мурзакматов

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВОДОПРОВОДИМОСТИ ПЛАСТА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

*Рассматривается применение метода регуляризации А. Н. Тихонова к идентификации водопроводимости пористой среды в двумерном стационарном уравнении фильтрации подземных вод*

Коэффициент фильтрации является одним из основных гидрогеологических параметров, характеризующих водоносные пласты. Для составления адекватной математической модели процесса фильтрации подземных вод необходимо иметь более или менее полную информацию о пространственном распределении значений искомых параметров. Определение гидрогеологических параметров опытно–фильтрационными методами сопряжено со значительными материальными и временными затратами. В данной работе рассматривается метод идентификации водопроводимости пласта расчетным путем по некоторым известным значениям напорной функции.

Задача идентификации водопроводимости в неоднородной пористой среде сводится к решению коэффициентной обратной задачи для уравнения напорной фильтрации. Для обеспечения единственности решения должны быть заданы значения напоров и искомой функции в некотором дискретном множестве точек, полученные наблюдением и/или экспериментом.

Установившееся движение подземных вод в водоносном пласте, ограниченном сверху и снизу непроницаемыми прослойками, описывается уравнением [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=f(x,y),\quad (x,y)\in D \tag{1}$$

с граничным условием

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=\alpha+\beta H,\quad (x,y)\in \Gamma=\partial D, \tag{2}$$

где $T=T(x,y)$ – водопроводимость пласта ($м^2/сут$); $H=H(x,y)$ – напорная функция ($м$); $f(x,y)$ – функция источников и стоков ($м/сут$); $\alpha=\alpha(x,y)$ и $\beta=\beta(x,y)$ – заданные функции; $D$ – область фильтрации в плане, $\Gamma$ – ее граница.

В данной задаче, кроме условия (2), задаются так называемые внутренние граничные условия о которых говорилось выше.

$$H(x_i,y_i)=H_i^э,\ i=1,2,...,p, \tag{3}$$

$$T(x_j,y_j)=T_j^э,\quad j=1,2,...,q, \tag{4}$$

Задача заключается в определении функции $T(x,y)$ из уравнения (1) при соблюдении условий (2) – (4). Поскольку значения напоров задаются с определенной погрешностью и в недостаточном объеме, то задача нахождения коэффициента уравнения (1) является некорректной, поэтому для ее решения применяем метод регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Задача сводится к нахождению функции $T(x,y)$, сообщающей в области $D$ минимум функционалу [3]

$$\Phi(T)=\sum_{i=1}^{p}\left[H_i(T)-H_i^э\right]^2+\sum_{j=1}^{q}(T_j-T_j^э)^2+\gamma\left|\delta T\right|^2, \tag{5}$$

где $\delta T$ – вариация функции $T(x,y)$; $\gamma$ – параметр регуляризации; $H_i(T)$ – расчетные значения напоров, которые находятся как решение задачи (1), (2).

Задача (1), (2) решается методом конечных элементов [4]. Область фильтрации $D$ разбивается на треугольные элементы таким образом, чтобы точки, в которых заданы экспериментальные значения $H_i^э$ и $T_j^э$, совпали с вершинами элементов. В этих точках используются условия (3) и (4), а в остальных узлах начальные приближения функций $H(x,y)$ и $T(x,y)$ должны удовлетворять условиям $\min_i H_i^э \le H \le \max_i H_i^э$ и $\min_j T_j^э \le T \le \max_j T_i^э$ соответственно. В элементе $(e)$ с вершинами $i, j,k$ функция $H(x,y)$ выражается формулой [5]

$$H^{(e)}(x,y) = H_i N_i^{(e)}(x,y) + H_j N_j^{(e)}(x,y) + H_k N_k^{(e)}(x,y), \tag{6}$$

где

$$H_s = H(x_s, y_s), \quad N_s(x,y) = (a_s + b_s x + c_s y)/2\Delta, \quad s = i, j, k,$$

$$a_i = x_j x_k - x_k y_j, \qquad b_i = y_j - y_k, \qquad c_i = x_k - x_j,$$

$$a_j = x_k x_i - x_i y_k, \qquad b_j = y_k - y_i, \qquad c_j = x_i - x_k,$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \qquad b_k = y_i - y_j, \qquad c_k = x_j - x_i,$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

Суммируя равенство (6) по всем элементам $(e)$, получаем формулу

$$H(x,y) \approx H_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} H_j N_j(x,y), \tag{7}$$

где $n$ – число всех узлов сетки.

Применяем к задаче (1), (2) принцип Галеркина:

$$-\iint_D N_i(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) + f\right]dxdy + \int_\Gamma N_i(x,y)\left(T\frac{\partial H}{\partial n} - \alpha - \beta H\right)ds = 0,$$

$$j = 1,2,\dots,n.$$

Используя в двойном интеграле формулу Грина, приходим к системе уравнений

$$\iint_D T\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)dxdy - \iint_D N_i f dxdy - \int_\Gamma N_i H\beta ds = 0, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

После подстановки вместо $H(x,y)$ ее разложения (7), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно напоров

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H_j = b_i, \quad j = 1,2,\dots n, \tag{8}$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy - \int_\Gamma N_i N_j \beta ds,$$

$$b_i = \iint_D N_i f dxdy + \int_\Gamma N_i \alpha ds. \tag{9}$$

Систему (8) решаем одним из точных или приближенных методов.

Для определения поля функции $T(x,y)$ мы, наряду с количественной информацией (условия (3) и (4)), используем также качественную информацию об искомой функции, т. е. функционал $\Phi(T)$ требует, чтобы функция $T(x,y)$ была гладкой, что соответствует физической природе водопроводимости.

Теперь займемся минимизацией функционала (5). При каждом наборе значений функции $T(x,y)$ получаем вполне определенные значения функции $H(x,y)$, т. е. имеем оператор $H(T)$, определенный алгоритмически по формулам (1), (2), (8), (9). Этот оператор в общем случае является нелинейным. Линеаризуем его следующим образом

$$H(T)=H(\tilde{T})+\sum_{s=1}^{n}(T_s-\tilde{T}_s)\frac{\partial H}{\partial T_s}+R_2(\Delta T), \tag{10}$$

где $\tilde{T}_s$ –значение функции $T$ в точке $(x_s,y_s)$, полученное в предыдущей итерации; $R_2(\Delta T)$ – остаточный член разложения. Подставляя (10) в (5) и используя необходимое условие минимума функции многих переменных, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial T_k}=\sum_{i=1}^{p}\left[\tilde{H}_i+\sum_{s=1}^{n}(T_s-\tilde{T}_s)\frac{\partial H_i}{\partial T_s}-H_i^э\right]\frac{\partial H_i}{\partial T_k}+\mu(T_k-T_k^э)+\gamma(T_k-\tilde{T}_k)=0\,,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

или

$$\sum_{s=1}^{n}C_{ks}T_s=d_k\,,\quad k=1,2,\ldots,n \tag{11}$$

с коэффициентами

$$C_{ks}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial H_i}{\partial T_s}\frac{\partial H_i}{\partial T_k}\,,\quad k\neq s\,,$$

$$C_{kk}=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial H_i}{\partial T_k}\right)^2+\gamma+\mu$$

и с правыми частями

$$d_k=\sum_{i=1}^{p}\left(H_i^э-\tilde{H}_i+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H_i}{\partial T_s}\tilde{T}_s\right)\frac{\partial H_i}{\partial T_k}+\mu T_k^э+\gamma\tilde{T}_k\,.$$

Здесь

$$\mu=\begin{cases}1\,, & если \quad k^э \quad задано,\\ 0\,, & если \quad k^э \quad не \quad задано.\end{cases}$$

Матрицы систем (8) и (11) являются симметричными и имеют диагональное преобладание и они легко решаются методом Гаусса. Производная $\partial H/\partial T$ является операторной, т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial T}=\left(\frac{\partial H_i}{\partial T_j}\right),\quad i,j=1,n\,,$$

а частные производные аппроксимируются разностными отношениями

$$\frac{\partial H_i}{\partial T_j}\approx\frac{\Delta H_i}{\Delta T_j}=\frac{H_i^{(\nu+1)}-H_i^{(\nu)}}{T_j^{(\nu+1)}-H_j^{(\nu)}}\,,$$

где $\nu$ –номер итерации.

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя начальные значения $H$ и $T$ в качестве нулевого приближения, решается задача (1), (2) и определяется первое приближение $H^{(1)}$ . Затем, придавая приращение $\Delta T$ функции $T(x,y)$, находим второе приближение $H^{(2)}$. Это дает возможность приближенно определить производную $\partial H/\partial T$ и решить систему (11) при некотором значении параметра регуляризации $\gamma$. Итерация по $\nu$ проводится до установления фильтрационного процесса. Если при этом полученные значения напоров в пределах ошибок не совпадут с данными экспериментальными значениями $H^{э}$, то итерация проводится по параметру $\gamma$, выбор которого может быть осуществлен методом невязок [2].

Работа алгоритма проверена на решении следующей тестовой задачи, рассмотренной в работах [6,7]. Областью фильтрации $D$ является круг $x^2 + y^2 \le 0.25$, который разбит на 54 треугольника (элемента) с максимальной длиной сторон $\Delta x = \Delta y = 0.2$. Число узлов сетки (вершин треугольников)–37, из них 18 – граничных. В этой области заданы функции $H(x,y)=x^2+y^2+5$, Q(x,y)=0, $f(x,y)=-40(2x^2+2y^2+1)$. Искомой функцией является $T(x,y)=10(x^2+y^2+1)$. Число узлов, в которых задаются экспериментальные (точные) значения функций $H(x,y)$, равно: $p$= 37, 22, 5. В каждом из этих случаев задаются точные значения искомой функции в $q$=17, 9, 5 точках.

Область фильтрации и все функции, входящие в задачу, специально подобраны так, чтобы они обладали центральной и осевой симметрией и следовательно, искомое решение имело такие же свойства. Поэтому в табл. 1 приведены значения искомой функции только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2 и 9 являются граничными.

*Приближенные значения функции T(x,y), полученные методом регуляризации*

*Таблица 1*

| Узлы | Точные значения $T(x,y)$ | Приближенные значения $T(x,y)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $p$=22 | | | $p$=5 | | |
| | | $q$=17 | $q$=9 | $q$=5 | $q$=17 | $q$=9 | $q$=5 |
| 2 | 12,309 | 12,100 | 11,663 | 10,957 | 12,100 | 11,663 | 11,980 |
| 7 | 11,225 | 11,270 | 11,271 | 10,915 | 11,270 | 11,271 | 11,833 |
| 8 | 11,625 | 11,580 | 11,723 | 10963 | 11,580 | 11,723 | 11,960 |
| 9 | 12,521 | 12,258 | 12,297 | 10,987 | 12,258 | 12,297 | 12,388 |
| 13 | 10,406 | 10,519 | 11,371 | 10,858 | 10,519 | 11,377 | 11,706 |
| 14 | 11,206 | 11,784 | 11,645 | 11,114 | 11,784 | 11,645 | 11,935 |
| 19 | 10,000 | 10,136 | 10,313 | 10,325 | 10,136 | 10,313 | 10,337 |
| 21 | 11,600 | 11,839 | 11,644 | 11,001 | 11,839 | 11,644 | 12,035 |
| max отн. погреш. | | 5,2 | 9,2 | 12,3 | 5,2 | 9,3 | 12,5 |

В табл. 2 решение данной задачи сравнивается с соответствующими результатами, полученными другими методами [6,7]. Следует отметить, что идентификация параметров водоносных горизонтов с использованием методов малых возмущений [6] и регуляризации является устойчивой процедурой, что очень важно при проведении гидрогеологических расчетов в реальных условиях

*Сравнение с результатами, полученными другими методами*

*Таблица 2*

| 1.1. Погрешности | $q$=17 | | | $q$=9 | | | $q$=5 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| Абсолютная | 0,86 | 1,22 | 0,58 | 0,85 | 1,17 | 0,97 | 1,0 | 1,23 | 1,30 |
| Относительная в% | 7,4 | 11,5 | 5,2 | 7,6 | 11,0 | 9,3 | 8,7 | 11,7 | 12,5 |

Примечание: $a$ – погрешности метода малых возмущений [6];
$b$ – погрешности, полученные в работе [7];
$c$ – погрешности метода регуляризации, полученные при $p$=5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова–Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977.–664 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 233 с.
3. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М. Об идентификации коэффициента фильтрации в неоднородном водоносном горизонте. //Вестник Иссык–Кульского университета, №3, 1999. – С. 73–77.
4. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. – Фрунзе: Илим, 1982. – 280 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. –392 с.
6. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Об идентификации водопроводимости напорного потока методом теории возмущений //Вестник Иссык–Кульского университета. –Каракол, № 9, 2003.–С. 49–54.
7. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Об идентификации параметров планового фильтрационного потока //Вестник Иссык–Кульского университета, –Каракол, №9, 2003.–С. 26–33.