УДК 532. 546

М.У.Мурзакматов, Ж.Т.Асанакунова

ПРИБЛИЖЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ В ПЛАНОВОМ НАПОРНОМ ПОТОКЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Методом теории возмущений решена задача идентификации обобщенного коэффициента диффузии в двумерном стационарном уравнении солепереноса.

В связи с широким проникновением математических методов исследования в различные области таких наук, как почвоведение, мелиорация, гидрогеология и т. д., процессы конвективной диффузии в пористых средах заинтересовали математиков-прикладников. Уравнения конвективной диффузии в пористых средах описывают процессы влаго- и солепереноса в почвогрунте. Адекватное описание таких процессов имеет огромное значение для мелиорации засоленных земель аридной зоны.

Прогнозирование изменения процессов водо- и солеобмена в почвогрунтах до недавнего времени основывалось на балансовых расчетах, которые имеют крупный недостаток, заключающийся в том, что балансовый метод не отражает связи между водным и солевым режимом почв.

Метод математического моделирования дает возможность получить количественное описание явления. Однако для построения математической модели, которая адекватно описывала бы натуру, требуется детальное знание физического механизма явления, что в реальных условиях ввиду сложности объекта исследования не всегда выполнимо. Кроме того, при моделировании возникает необходимость определения параметров системы (коэффициентов фильтрации, водопроводимости, коэффициентов растворения, диффузии, сорбции и т. д.), которые сами являются функциями процесса и непосредственное измерение которых чрезвычайно затруднительно. Наиболее доступным, экономичным и надежным методом определения гидрогеофизических параметров пористых сред является численное решение коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений фильтрации подземных вод и солепереноса. В данной работе мы рассмотрим применение метода малых возмущений к идентификации обобщенного коэффициента диффузии.

Процесс изменения концентрации загрязняющего вещества в водоносном пласте, обусловленное конвективным переносом с учетом дисперсии при отсутствии сорбции и кинетики химической реакции в стационарном режиме, описывается уравнением [1]

$$LC=g(x,y), \qquad (x,y) \in Д \tag{1}$$

с граничным условием

$$lC=\alpha_c(x,y), \qquad (x,y) \in S=\partial Д, \tag{2}$$

где

$$L=\frac{\partial}{\partial x}\left(V_x - D\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V_y - D\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$l=D\frac{\partial}{\partial n}+\beta_c,$$

$C=C(x,y)$ –концентрация загрязняющего вещества в жидкости; $D=D(x,y)$ –обобщенный коэффициент диффузии или коэффициент гидродисперсии: $D=D_k+D_m$, D_k – коэффициент конвективной диффузии; D_m - коэффициент молекулярной диффузии; V_x и V_y –компоненты скорости фильтрации в условиях установившегося движения; $g=g(x,y)$ –функция, описывающая вклад загрязнителей; $\alpha_c=\alpha_c(x,y)$ и $\beta_c=\beta_c(x,y)$ –заданные функции.

Компоненты скорости фильтрации определяются по линейному закону Дарси

$$V_x = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad V_y = -k\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{3}$$

где $k = k(x,y)$ – коэффициент фильтрации; $h = h\ (x,y)$ – напорная функция, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+Qh = f(x,y) \tag{4}$$

с краевым условием

$$T\frac{\partial h}{\partial n}+\beta h = \alpha(x,y). \tag{5}$$

В уравнении (4) $T=T(x,y)$ –водопроводимость пласта; $Q=Q(x,y)$ –функция перетока из нижележащих пластов; $f=f(x,y)$ –функция источников и стоков подземных вод; $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$ - заданные функции.

Задача заключается в идентификации коэффициента диффузии $D(x,y)$ в уравнениях (1) и (2). В работах [2, 3] разработаны алгоритмы идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений, основанные на методе малых возмущений [4, 5]. Согласно этим алгоритмам, вычислительный процесс состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Образуем начальное приближение искомой функции $D^{(0)}(x,y)$. Для этого используем опорные (экспериментальные) значения этой функции

$$D^{(0)}(x_s,y_s)= D^{э}(x_s,y_s), \quad s=1,2,\ldots,p, \tag{6}$$

где p –число точек, где заданы значения $D^{э}$, ($1\le p<n$). Разобьем область $Д$ на m треугольников (элементов) с общим числом n таким образом, чтобы точки (x_s,y_s), $s=1,2,\ldots,p$ совпали с вершинами треугольников. В остальных n-p точках значения функции $D^{(0)}(x,y)$ подберем из интервала $[\min\limits_S D^{Э}_S, \max\limits_S D^{Э}_S]$ и представим искомую функцию в виде

$$D(x,y)\approx D_n(x,y)=\sum_{j=1}^{n} D_j N_j(x,y), \tag{7}$$

где $D_j= D\ (x_j,y_j)$ – неизвестные коэффициенты, $N_j\ (x,y)$ – линейные базисные функции в методе конечных элементов.

Используя начальное приближение $D^{(0)}(x,y)$, решаем задачу (1) и (2) и находим функцию $C^{(0)}(x,y)$. Для этого представим функцию $C(x,y)$ в виде разложения

$$C(x,y)\approx C_n(x,y)=\sum_{j=1}^{n} C_j N_j(x,y) \tag{8}$$

и к невязкам уравнений (1) и (2) применим обобщенный принцип Галеркина:

$$\iint\limits_{Д} N_i\left(LC_n^{(o)}-g\right)d\sigma+\int\limits_S N_i\left(lC_n^{(o)}-\alpha\right)ds=0, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Применяя в двойном интеграле формулу Грина, приходим к системе уравнений

$$\iint\limits_{Д} D^{(0)}q(N_i,C_n^{(0)})d\sigma+\iint\limits_{Д} kC_n^{(0)}q(N_i,h)d\sigma+\int\limits_S N_iC_n^{(0)}\beta_c ds-$$
$$-\frac{1}{m}\int\limits_S N_iC_n^{(0)}(h\beta-\alpha)ds=\iint\limits_{Д} N_i g d\sigma+\int\limits_S N_i\alpha_c ds, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

После подстановки вместо $C_m^{(0)}$ ее разложения (8) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_j^0 = g_i, \qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

где

$$a_{ij} = \iint_{Д} D^{(0)}(x,y) q(N_i, N_j) d\sigma + \iint_{Д} N_j k(x,y) q(N_i, h) d\sigma +$$
$$+ \int_S N_i N_j \beta_c ds - \frac{1}{m} \int_S N_i N_j (\beta h - \alpha) ds,$$
$$g_i = \iint_{Д} N_i g(x,y) d\sigma + \int_S N_i \alpha_c ds,$$
$$q(N_i N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y},$$

m – мощность пласта.

Функция $h(x,y)$ определяется из задачи (4), (5). Решение этой задачи методом конечных элементов освещено достаточно широко (напр. в [6]), поэтому на алгоритме нахождения функции $h(x,y)$ мы не останавливаемся.

Система (9) хорошо обусловлена, ее матрица имеет диагональное преобладание, поэтому она может быть решена одним из точных методов.

Шаг 2. Используя первое приближение коэффициента диффузии $D^{(0)}(x,y)$, из краевой задачи

$$L\delta C = \delta g(x,y), \qquad (x,y) \in Д, \tag{10}$$

$$l\delta C = \delta \alpha_c(x,y), \qquad (x,y) \in S, \tag{11}$$

определяем вариацию концентрации $\delta C(x,y)$ в виде

$$\delta C(x,y) \approx \delta C_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \delta C_j N_j(x,y) \tag{12}$$

и образуем функцию

$$C'(x,y) = C^{(0)}(x,y) + \delta C(x,y). \tag{13}$$

Задача (10), (11) решается по только что изложенному алгоритму путем замены функций $C(x,y)$, $g(x,y)$, и $\alpha(x,y)$ на их вариации.

Шаг 3. Теперь подвергаем возмущению не только правые части уравнений (1), (2), но и коэффициенты $D(x,y)$ и $\beta(x,y)$. Рассмотрим задачу

$$L'C' = g'' \qquad (x,y) \in Д, \tag{14}$$
$$l'C' = \alpha_c'', \qquad (x,y) \in S, \tag{15}$$

где

$$L' = L + \delta L, \qquad l' = l + \delta l,$$

$$g'' = g' + \delta g', \quad \alpha_c'' = \alpha_c' + \delta\alpha_c', \qquad g' = g + \delta g, \quad \alpha_c' = \alpha_c + \delta\alpha_c.$$

Поскольку функция $C'(x,y)$ является решением задачи

$$LC' = g', \qquad l'C' = \alpha_c',$$

из (14), (15) получаем задачу

$$\delta LC' = \delta g', \qquad (x,y) \in Д, \tag{16}$$
$$\delta lC' = \delta \alpha_c', \qquad (x,y) \in S, \tag{17}$$

где

$$\delta L = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_x - \delta D\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V_y - \delta D\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\delta l = \delta D\frac{\partial}{\partial n} + \delta\beta_c.$$

Решение задачи (16), (17) ищется в виде

$$\delta D(x,y) \approx \delta D_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \delta D_j N_j(x,y). \qquad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (16), (17) и применяя обобщенный принцип Галеркина, приходим к системе уравнений относительно δD_j:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\iint_{Д} N_j q(N_j, C')d\sigma\right)\delta D_j = -\iint_{Д} N_j\left[\frac{\partial(V_x C')}{\partial x} + \frac{\partial(V_y C')}{\partial y}\right]d\sigma + \\ + \iint_{Д} N_i \delta g' \, d\sigma - \int_S N_i(\delta\beta_c C' - \delta\alpha_c'')dS, \qquad i = 1,2,\dots,n. \qquad (19)$$

Первый интеграл в правой части (19) преобразуется в следующем виде

$$\iint_{Д} N_j\left[\frac{\partial}{\partial x}(V_x C') + \frac{\partial}{\partial y}(V_y C')\right]d\sigma = \iint_{Д} C' kq(N_i, h)d\sigma + \frac{1}{m}\int_S N_i C'(\beta h - \alpha)dS. \qquad (20)$$

Система (19) является плохо обусловленной, поэтому для ее решения мы должны максимально использовать регуляризирующие факторы. Основными из этих факторов являются экспериментальные значения искомой функции (6). Другие факторы – это информация о качественных свойствах искомой функции. Мы вправе предположить, что искомая функция является гладкой и слабоизменяющейся, т. е. ее вариация близка к нулю. С учетом этих факторов и формулы (20) система уравнений (19) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\iint_{Д} N_j q(N_i, C')d\sigma\right)\delta D_j + \mu\iint_{Д} N_i \delta D_n d\sigma + \gamma\sum_{s=1}^{p}\left(\delta D_s - D_s^{э} + \tilde{D}_s\right) = \iint_{D} N_j \delta g' d\sigma - \\ - \iint_{Д} C' kq(N_i, h)d\sigma - \frac{1}{m}\int_S N_i c'(\beta h - \alpha)ds - \int_S N_i(c'\delta\beta_c - \delta\alpha_c')dS, \qquad i = 1,2,\dots,n. \qquad (21)$$

Здесь

$\tilde{D}$ - значения D из предыдущей итерации;

γ, μ –положительные числовые параметры.

Запишем уравнение (21) для вершины i элемента (e):

$$a_{ii}\delta D_i + a_{ij}\,\delta D_j + a_{ik}\,\delta D_k = g_i \qquad (22)$$

с коэффициентами

$$a_{ii} = \iint_e N_i q(N_i, C')d\sigma + \mu\iint_e N_i^2 d\sigma + \gamma_i,$$

$$a_{ij} = \iint_e N_j q(N_i, C')d\sigma + \mu\iint_e N_i N_j d\sigma + \gamma_j,$$

$$a_{ik} = \iint_e N_k q(N_i, C')d\sigma + \mu\iint_e N_i N_k d\sigma + \gamma_k,$$

$$g_i = \iint_e N_i \delta g' d\sigma - \iint_e C' kq(N_i, h)d\sigma - \frac{1}{m}\int_{Se} N_i C'(\beta h - \alpha)ds - \\ - \int_{Se} N_i(C'\delta\beta_c - \delta\alpha_c')ds + \gamma_i\left(D_i^{э} - \tilde{D}_i\right),$$

где

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & \text{если} \quad D_s^{э} \quad \text{задано}, \\ 0, & \text{если} \quad D_s^{э} \quad \text{не задано}, s = i, j, k; \end{cases}$$

Система (21) решается методом сингулярного разложения матрицы (SVD – методом) [7]. Определив $\delta D(x,y)$ из системы (21), образуем функцию

$$D^{(1)}(x,y) = D^{(0)}(x,y) + \delta D(x,y). \qquad (23)$$

Подставляя $D^{(1)}(x,y)$ вместо функции $D^{(0)}(x,y)$, повторяем шаги 1, 2, 3 и находим $D^{(2)}(x,y)$ и т. д. Вычислительный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i \left| D_i^{(\nu)} - D_i^{(\nu-1)} \right| < \delta,$$

где ν – номер итерации, δ – заданное положительное число.

Работа алгоритма проверена на решении следующей тестовой задачи. Область D представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 0{,}25$. В этой области задаем исходные данные для *(1), (2)* и *(4), (5)*:

$$C(x,y) = 2\cdot(x^2 + y^2 + 5), D(x,y) = 10\cdot(x^2 + y^2) + 1,$$
$$H(x,y) = x^2 + y^2 + 5, T(x,y) = 5, Q(x,y) = 1.$$

Область D разбита на 54 элементарных треугольника с обшим числом вершин (узлов сетки) $n = 37$. Задавая в p $(1 \le p \le n)$ точках экспериментальные (точные) значения функции $D(x,y)$, определяем эту функцию во всех узлах сетки по описанному выше алгоритму. В табл.1 приведены точные и приближенные значения этой функции, лежащие в четверти круга.

Точные и приближенные значения функции $D(x,y)$

Таблица 1.

Номера узлов		2	4	7	8	9	13	14	19	Относ-ная погреш-ность
Точные значения		3.309	3.517	2.225	2.625	3.521	1.406	2.206	1.000	
Приб лиж. знач.	p =5	3.224	2.690	2.114	2.002	3.429	1.401	2.235	0.885	11.5 %
	p =9	3.282	3.122	2.071	1.978	3.133	1.391	2.347	0.888	12.2 %
	p =13	3.318	3.309	3.308	2.128	3.309	2.219	2.292	0.087	8.7 %
	p =17	3.457	3.309	2.365	2.532	3.371	1.413	2.460	0.934	6.6 %

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения. / Под ред. И.К. Гавич. –М.: Недра, 1985. –320 с.
2. Джаныбеков Ч.Дж., Мурзакматов М.У. Идентификация параметров в задаче о переносе загрязнителей в пористой среде. //Вестник ИГУ, -Каракол, №8, 2002.- С. 38 –50.
3. Джаныбеков Ч.Дж., Мурзакматов М.У. Алгоритмы для определения коэффициента диффузии и пористости грунта. //Вестник ИГУ, -Каракол, №8, 2002. –С. 50 –58.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. –М.: Наука, 1980, –536 с.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982. –319 с.
6. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. –Фрунзе: Илим, 1989. –183 с.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир, 1980. –279 с.