УДК 517.947.537

Тогочуев А.Ж., Бектемиров М.А., Сагынтай кызы Н.
ЫГУ им. К.Тыныстанова

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе рассматривается нелинейное уравнение эллиптического типа второго порядка и доказывается существование решения в неограниченной области.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$LU = -\rho(x)(\rho(x)U(x))'' + q(x,u)U(x) = f(x) \in L_2(R)$$
$$R = (-\infty;\infty) \tag{1}$$

В начале необходимо показать существование решения уравнения (1), затем будут изучены вопросы гладкости его решений.

1. Существование решений.

Определение. Функцию $\boldsymbol{U(x) \in L_2(R)}$ назовем слабым решением уравнения (1), если существует последовательность

$$\{U_n\} \subset W_2^1(R) \cap W_{2,loc}^1(R)$$

такая, что $\|U_n - U\|_{L_2,loc(R)} \to 0, \quad \|LU_n - f\|_{L_2,loc(R)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 1.

Пусть $\rho(x) \geq \delta > 0, \quad \rho(x) \in L_{loc}^2(R), \quad \rho^{-2}(x)q(x,u) \geq \gamma > 0$ и $q(x,u)$ – непрерывна по обеим аргументам в R^2, тогда для любой $\boldsymbol{f \in L_2(R)}$ существует слабое решение уравнения (1) в пространстве $\boldsymbol{W_2^1(R)}$.

Доказательство. Так как, по предположению, $\rho^{-2}(x)q(x,u)$ снизу ограничена, то не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $\rho^{-2}(x)q(x,u) \geq 1$.

Сначала докажем существование решения следующей краевой задачи

$$L_{n\varepsilon}U_{n\varepsilon} = -\rho(\rho U_{n\varepsilon})'' + \rho^2 U_{n\varepsilon} + \frac{\left|\rho^2 q(x,U_{n\varepsilon}) - 1\right|\rho^2 U_{n\varepsilon}}{1 + \varepsilon\left[\rho^{-2}q(x,U_{n\varepsilon}) - 1\right] + \varepsilon\left\|\hat{a}(x,U_{n\varepsilon})\right\|_2^2} = X_n f \tag{2}$$

$$\boldsymbol{U_{n\varepsilon}(a_n) = U_{n\varepsilon}(a_n) = 0} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{X_n}$ – характеристическая функция отрезка $[-a_n, a_n]$.

$$\hat{a}(x, U_{n\varepsilon}) = \left[\rho^{-2}(x)Q(x, U_{n\varepsilon}) - 1\right]\rho^2 U_{n\varepsilon}$$

в пространстве $W_{2.0}^2[-a_n, a_n]$, здесь $W_{2.0}^2[-a_n, a_n]$-пространство функций $\boldsymbol{Z \in W_2^2}$ и $Z(-a_n) = Z(a_n) = 0$.

Задачу (2)-(3) мы сведем к эквивалентному интегральному уравнению, к которому потом применим принцип Шаудера [5].

Через $\boldsymbol{L_0}$ обозначим оператор, определенный на $W_{2.0}^2[-a_n, a_n]$ равенством $\boldsymbol{L_0 U = -\rho(\rho u)'' + \rho^2 U}$.

В силу известных теорем для эллиптических операторов существует вполне непрерывный оператор $\boldsymbol{L_0^{-1}}$, определенный во всем пространстве $\boldsymbol{L_2[-a_n, a_n]}$.

Лемма 2. Задача (2)-(3) эквивалентна интегральному уравнению

$$Z_{n\varepsilon} = -\frac{\left[\rho^{-2}q(x, L_0^{-1}Z_{n\varepsilon}) - 1\right]\rho^2 L_0^{-1}Z_{n\varepsilon}}{1 + \varepsilon\left[\rho^{-2}q(x, L_0^{-1}Z_{n\varepsilon}) - 1\right] + \varepsilon\left\|\hat{a}\left(x, L_0^{-1}Z_{n\varepsilon}\right)\right\|_2^2} + X_n f \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U_{n\varepsilon}}$ решение задачи (2)-(3). Полагая

$$L_0 U_{n\varepsilon} = Z_{n\varepsilon} \qquad (U_{n\varepsilon} = L_0^{-1} Z_{n\varepsilon}),$$

получим (4). Обратно, пусть

$$Z_{n\varepsilon}(x) \in L_2[-a_n, a_n]$$

удовлетворяет уравнению (4). Рассмотрим краевую задачу

$$L_0 U_{n\varepsilon} = Z_{n\varepsilon}(x)$$

$$U_{n\varepsilon}(-a_n) = U_{n\varepsilon}(a_n) = 0 .$$

Эта задача имеет единственное решение

$$U_{n\varepsilon} = L_0^{-1} Z_{n\varepsilon}, \qquad U_{n\varepsilon} \in W_{2,0}^{2}[-a_n, a_n],$$

которое удовлетворяет уравнению

$$-\rho(\rho U_{n\varepsilon})'' + \rho^2 U_{n\varepsilon} + \frac{\left|\rho^2 q(x, U_{n\varepsilon}) - 1\right|\rho^2 U_{n\varepsilon}}{1 + \varepsilon\left[\rho^{-2} q(x, U_{n\varepsilon}) - 1\right] + \varepsilon\left\|\hat{a}(x, U_{n\varepsilon})\right\|_2^2} = X_n f$$

т.е. $U_{n\varepsilon}$ является решением задачи (2)-(3). Лемма доказана.

Обозначим через A оператор, действующий по формуле

$$\grave{A}Z = -\frac{\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z_{n\varepsilon}) - 1\right]\rho^2 L_0^{-1} Z}{1 + \varepsilon\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z_{n\varepsilon}) - 1\right] + \varepsilon\left\|\hat{a}\left(x, L_0^{-1} Z\right)\right\|_2^2} + X_n \varepsilon .$$

Покажем, что оператор A переводит шар

$$\overline{\rho}(X_n f, N) = \left\{ Z \in L_2[-a_n, a_n] : \left\|Z - X_n f\right\|_2 \le N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\}$$ в себя, т.е.

$\left\|AZ - X_n f\right\|_2 \le N$.

Для этого рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $\left\|\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z) - 1\right]\rho^2 L_0^{-1} Z\right\| \le N$ тогда

$$\left\|AZ - X_n f\right\|_2 \le \frac{\left\|\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z) - 1\right]\rho^2 L_0^{-1} Z\right\|_2}{\left\|\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z) - 1\right]\rho^2 L_0^{-1} Z\right\|_2^2} \le \frac{1}{\varepsilon N} = N$$

Теперь покажем, что оператор $A - X_n f$ вполне непрерывен. Из определения оператора A видно, что оператор $A - X_n f$ представляет собой произведение двух операторов $\hat{A}, L_0^{-1}$, где оператор B действует по формуле

$$\hat{A}Z = -\frac{\left[\rho^{-2} q(x, L_0^{-1} Z) - 1\right]\rho^2}{1 + \varepsilon\left[\rho^{2} q(x, L_0^{-1} Z) - 1\right] + \varepsilon\left\|\hat{a}\left(x, L_0^{-1} Z\right)\right\|_2^2} .$$

Если будет показана непрерывность оператора B, то множество $\hat{A}L_0^{-1}\overline{\rho}(X_n f, N)$ компактно. Этим и будет доказано вполне непрерывность оператора $A - X_n f$.

Итак, покажем непрерывность оператора B.

Пусть $\left\|Z_m - Z\right\|_2 \to 0 \quad n \to \infty \quad Z_m, Z \in L_2[-a_n, a_n]$.

Тогда

$$\left\|\hat{A}Z_m-\hat{A}Z\right\|_2^2=$$

$$=\int_{-a_n}^{a_n}\left|\frac{\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]\rho^2}{1+\varepsilon\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]+\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z_m\right)\right\|_2^2}-\frac{\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z)-1\right]\rho^2}{1+\varepsilon\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z)-1\right]+\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z_m\right)-1\right\|_2^2}\right|^2 dx=$$ где

$$=\int_{-a_n}^{a_n}\left|\frac{\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]\rho^2}{1+\varepsilon\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]-\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z_m\right)\right\|_2^2}\right|^2 \rho^4\left|1-\varphi_m(x)\right|^2 dx$$

$$\varphi_m(x)=\frac{\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z)-1\right]\left[1+\varepsilon\left(\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right)+\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z_m\right)\right\|_2^2\right]}{\left[1+\varepsilon\left(\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z)-1\right)+\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z\right)\right\|_2^2\right]\left[\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]}$$ учитывая

$$\frac{\rho^{-2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1}{1+\varepsilon\left[\rho^{2}q(x,L_0^{-1}Z_m)-1\right]+\varepsilon\left\|\hat{a}\left(x,L_0^{-1}Z_m\right)\right\|_2^2}\le\frac{1}{\varepsilon}.$$

Имеем

$$\left\|\hat{A}Z_m-\hat{A}Z\right\|_2^2\le\frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon^2}\int_{-a_n}^{a_n}\left|1-\varphi_m(x)\right|^2dx=\frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon^2}\left\|1-\varphi_m(x)\right\|_2^2 \qquad \text{ãäå} \quad \tilde{\rho}=\max_{x\varepsilon[-a_n,a_n]}\rho^4(x)$$

В силу вполне непрерывности L_0^{-1} и непрерывности функции $q(x,u)$ по x, u, переходя к пределу при $m\to\infty$, получим $\left\|\hat{A}Z_m-\hat{A}Z\right\|_2\to 0$.

Таким образом, вполне непрерывный оператор A переводит шар $\overline{\rho}\left(X_n f, N\right)$ в себя. Следовательно, согласно принципу Шаудера, интегральное уравнение (4) имеет в шаре $\overline{\rho}\left(X_n f, N\right)$ по крайней мере одно решение. Тогда на основе леммы (2) существует решение $U_{n\varepsilon}$ задачи (2)-(3), принадлежащее пространству $W_{2.0}^2[-a_n,a_n]$. Далее $\left\|U_{n\varepsilon}\right\|_{W_{2.0}^2[-a_n,a_n]}$ оценивается сверху константой, не зависящий от n,ε. Для этого возьмем линейный оператор

$$L_{n\varepsilon}U=-\rho(\rho U)''+\rho^2U+\frac{\left|\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1\right|\rho^2U}{1+\varepsilon\left[\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1\right]+\varepsilon\left\|(\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1)\rho^2U\right\|_2^2},$$

определенный на множестве $W_{2.0}^2[-a_n,a_n]$, где $\tilde{q}(x)=q(x,U_{n\varepsilon})$, а $U_{n\varepsilon}$ - решение задачи (2)-(3).

Составим скалярное произведение $(L_{n\varepsilon},U_{n\varepsilon},U_{n\varepsilon})$.

Интегрируя по частям и учитывая, что неинтегральные члены исчезают в силу (3), получим:

$$(L_{n\varepsilon},U_{n\varepsilon},U_{n\varepsilon})=\int_{-a_n}^{a_n}\left[-\rho(\rho U_{n\varepsilon})''+\rho^2U_{n\varepsilon}\right]U_{n\varepsilon}dx+\int_{-a_n}^{a_n}\frac{\left[\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1\right]\rho^2U_{n\varepsilon}^2}{1+\varepsilon\left[\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1\right]+\varepsilon\left\|\left[\rho^{-2}\tilde{q}(x)-1\right]\rho^2U_{n\varepsilon}\right\|_2^2}dx\ge$$

$$\ge\int_{-a_n}^{a_n}\left|(\rho U_{n\varepsilon})'\right|^2dx+\int_{-a_n}^{a_n}\left|\rho U_{n\varepsilon}\right|^2dx$$

К левой части применим неравенство Коши с $\varepsilon_1 - \dfrac{1}{\delta^2} > 0$

$$\left|(L_{n\varepsilon}U_{n\varepsilon}, U_{n\varepsilon})\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|L_{n\varepsilon}U_{n\varepsilon}\right\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|U_{n\varepsilon}\right\|_2^2 \le \frac{1}{2\delta^2}\int_{-a_n}^{a_n}\left|X_n f\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-a_n}^{a_n}\left|\rho U_{n\varepsilon}\right|^2 dx\ .$$

Из последующих двух неравенств имеем

$$\int_{-a_n}^{a_n}\left(\left|(\rho U_{n\varepsilon})'\right|^2 + \left|\rho U_{n\varepsilon}\right|^2\right)dx \ \le\ \frac{1}{\delta^2}\int_{-a_n}^{a_n}\left|X_n f\right|^2 dx \ \le\ \frac{1}{\delta^2}\int_{-a_n}^{a_n}\left|f\right|^2 dx \ =\ \frac{1}{\delta^2}\left\|f\right\|^2$$

Положим, $\dfrac{1}{\delta}\|a\|_2 = C_0$, тогда $\left\|\rho U_{n\varepsilon}\right\|_{W_2^2[-a_n, a_n]} \le C_0$.

Выберем какую-нибудь последовательность $\{\rho U_{n_{\varepsilon_k}}\}$, такую, что

$$\left\|\rho U_{n_{\varepsilon_k}}\right\|_{W_2^{/}[-a_n, a_n]} \le C_0 \tag{5}$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу (5) из последовательности можно выделить подпоследовательность, снова обозначим ее через $\{\rho U_{n_{\varepsilon_k}}\}$, такую, что

$$\rho U_{n_{\varepsilon_k}} \ \to\ \rho U_n \ \text{ слабо в } W_2\left[-a_n, a_n\right] \tag{6}$$

$U_{n_{\varepsilon_k}} \to U_n$ сильно в $L_2\left[-a_n, a_n\right]$.

Из (5) имеем

$$\left\|\rho U_n\right\|_{W_2^2[-a_n, a_n]} \le C_0 \tag{7}$$

а также согласно теореме вложения

$$U_n(-a_n) = U_n(a_n) = 0 \tag{8}$$

$$\left\|U_n\right\|_{W_2^2[-a_n, a_n]} \le C_1 \tag{9}$$

Покажем, что U_n удовлетворяет уравнению

$$L_n U = -\rho(\rho U)'' + q(x,u)u = X_n f\ , \tag{10}$$

учитывая, что $U_{n_{\varepsilon_k}}$ решение (2)-(3).

Имеем

$$\rho(\rho U_{n\varepsilon_k})'' = U_{n\varepsilon_k} + \frac{\left[q(x, U_{n\varepsilon_k}) - 1\right]U_{n\varepsilon_k}}{1 + \varepsilon\left[q(x, U_{n\varepsilon_k}) - 1\right] + \varepsilon_k\left\|\hat{a}\left(x, U_{n\varepsilon_k}\right)\right\|_2^2} + X_n f$$

подставляем в (10), тогда

$$\left\|L_n U_{n\varepsilon_k} - X_n f\right\|_{2,(-a_n,a_n)} = \left\|\left[(q(X,U_{n\varepsilon_k})-1) - \frac{q(X,U_{n\varepsilon_k})-1}{1+\varepsilon_k\left[q(X,U_{n\varepsilon_k})-1\right]+\varepsilon_k\left\|\hat{a}(x,U_{n\varepsilon_k})\right\|_2^2}\right]U_{n\varepsilon_k}\right\|_{2,(-a_n,a_n)} \le .$$

$$\le \sup_{X\in(-a_n,a_n)}\left[q(X,U_{n\varepsilon_k})-1-\frac{q(X,U_{n\varepsilon_k})-1}{1+\varepsilon_k\left[q(X,U_{n\varepsilon_k})-1\right]+\varepsilon\left\|\hat{a}(x,U_{n\varepsilon_k})\right\|_2^2}\right] * \left\|U_{n\varepsilon_k}\right\|_{2,(-a_n,a_n)}$$

В силу непрерывности функции $q(x,u)$ и (9) получим:

$$\left\|L_n U_{n\varepsilon_k} - X_n f\right\|_{2,(-a_n,a_n)} \to 0 \ \text{ при } k \to \infty \tag{11}$$

Это вместе с (6) дает, что U_n является слабым решением задачи (10), (8). Далее каждое U_n продолжим нулем вне $\left[-a_n, a_n\right]$ и продолжение обозначим через $\tilde{U}_n$. При таком продолжении $\rho\widetilde{U}_n \in W_2(R)$ и $\left\|\rho\widetilde{U}_n\right\|_{W_2(R)} \leq C_0$

Поэтому из последовательности $\{\rho\widetilde{U}_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\rho\widetilde{U}_n\}$, что

$$\rho\widetilde{U}_{n_k} \to \rho U \text{ слабо в } W_2^{-1}(R),\ \widetilde{U}_{n_k} \to U \text{ сильно в } L_{2,loc}(R) \qquad (12)$$

Пусть $[\alpha,\beta]$ - произвольный фиксированный сегмент в $\boldsymbol{R}$.

Тогда для любого e>0 существует такое число N, что при $k>N$

$$(\alpha,\beta) \subset Sup\widetilde{U}_{n_k}.$$

И в силу (11): $\left\|L\widetilde{U}_{n_{\varepsilon_k}} - f\right\|_{W_2(\alpha,\beta)} < \varepsilon$.

Отсюда и из (12) получаем, что $\boldsymbol{U(x)}$ является слабым решением уравнения (1).

Литература:

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969.
2. Тогочуев А.Ж., Муратбеков М.Б. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом. В кн.: Тезисы докладов конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября,1987.
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. –М.: Наука, 1948.