УДК:62:550.82

Асанкалиева А.К.
Республика Казахстан НПУ им. Абая

ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

В данной статье на основе теории пластичности и метода конечных элементов разработана процедура для решения задач геомеханики.

Основные представления деформационной теории пластичности сформулировал Генки. Исходные положения этой теории следующие: 1) тело изотропно; 2) относительное изменение объема является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению; 3) девиаторы тензора деформации и напряжения пропорциональны и коаксиональны:

$$D_\varepsilon = h\, D_\sigma, \qquad (1)$$

где h - функция инвариантов тензоров напряжения и деформации.

Уравнения деформационной теории пластичности нелинейные и связывают напряжение и деформации в виде конечных соотношений.

В современной интерпретации применительно к материалам типа горных пород и грунтов деформационная теория пластичности сводится к тому, что напряжение в среде однозначно определяется ее деформациями:

$$\{\sigma\} = [D_{уп}]\{\varepsilon\}. \qquad (2)$$

Матрица $[D_{уп}]$ связывает текущие значение деформаций и напряжений и называется секущей упруго-пластической матрицей. В общем случае эта матрица несимметрична относительно главной диагонали и ее элементы являются функциями напряжений или деформаций.

Если пластическое деформирование не сопровождается разрыхлением, то матрицу $[D_{уп}]$ можно подобрать в виде упругой секущей матрицы $[D_c]$ с переменными секущими упругими константами. Условием успешного применения уравнений деформационной теории пластичности к исследованию упруго- пластических задач является простое нагружение с пропорциональным возрастанием деформаций. Процесс пластической деформации является необратимым и напряжения в конечном состоянии зависят от пути деформирования. Уравнения теории пластического течения устанавливают связь между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, самими напряжениями и некоторыми параметрами пластического состояния. Исходные положения этой теории:

1) тело изотропно; 2) относительное изменение объема мало и является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению

$$\{d\varepsilon\} = 3K\{d\sigma\}, \qquad (3)$$

где К - коэффициент объемного сжатия;

3) полные приращения составляющих деформаций $\{d\varepsilon\}$ складываются из приращений составляющих упругой деформации $\{d\varepsilon^У\}$ в пластической деформации $\{d\varepsilon^P\}$:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^У\} + \{d\varepsilon^P\} \qquad (4)$$

Приращения составляющих упругой деформации связаны с приращениями составляющих напряжения законом Гука:

$$\{d\varepsilon^У\} = [D]^{-1}\{d\sigma\},$$

(5)

где $[D]^{-1}$ - матрица, обратная матрице упругости $[D]$;

4) девиатор напряжения D_σ и девиатор приращений пластической деформации $D^P_{d\varepsilon}$ пропорциональны:

$$D^P_{d\varepsilon} = d\lambda\, D_\sigma, \qquad (6)$$

где $d\lambda$ - некоторый бесконечно малый скалярный множитель.

Рассмотрим некоторое обобщение теории пластического течения для случая идеальной пластичности. Вводим пластический потенциал $\Phi(\sigma_{ij})$, $(i, j = 1, 2, 3)$ так, чтобы уравнение пластического течения можно было представить в виде:

$$d\varepsilon^P_{ij} = d\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (7)$$

Наиболее важным является простейший случай, когда функция текучести F и пластический потенциал Ф совпадают. В этом случае имеем

$$d\varepsilon^P_{ij} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (8)$$

и пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести (рис.1). Связь (8) называется принципом нормальности или ассоциированным законом течения.

Рассмотрим принцип нормальности в условиях плоской деформации. Пусть условия текучести рассматриваемой среды подчиняются критерию, зависящему только от второго (квадратичного) инварианта тензора напряжений (Треска- Сен- Венан, Мизеса, Губера). На осях σ_1, σ_3 этот критерий изображается прямой ВЕ, параллельной прямой $\sigma_1 = \sigma_3$ (рис. 2).

Вектор пластической деформации $\varepsilon_м$, соответствующий принципу нормальности, перпендикулярен прямой ВЕ и соответственно наклонен к осям ε_1 и ε_3 под углом 45^0. При этом компоненты вектора ε^P_1 и ε^P_3 равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а их сумма, соответствующая изменению объема, равна нулю:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon^P_1 + \varepsilon^P_3 = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, принцип нормальности для сред, подчиняющихся критерию Треска (Сен-Венана, Мизеса, Губера), предсказывает равнообъемный характер пластического течения.

Если условие текучести подчиняется критерию, зависящему не только от второго, но и от первого (линейного) инварианта тензора напряжений, то принцип нормальности будет предсказывать изменение объема в процессе пластического деформирования. На рисунке 2 прямая ВС соответствует критерию Кулона. Вектор пластических деформаций ε_N перпендикулярен прямой ВС. При этом: $|\varepsilon^P_1| > |\varepsilon^P_3|$ и

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon^{P}_{1} + \varepsilon^{P}_{3} < 0, \qquad (10)$$

т.е. происходит увеличение объема разрыхления (дилатация).

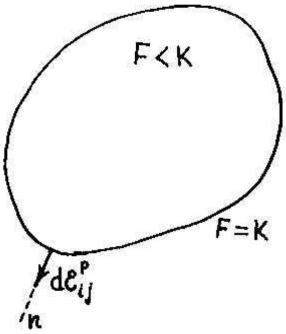

Рисунок 1. Поверхность текучести и развития пластического течения.

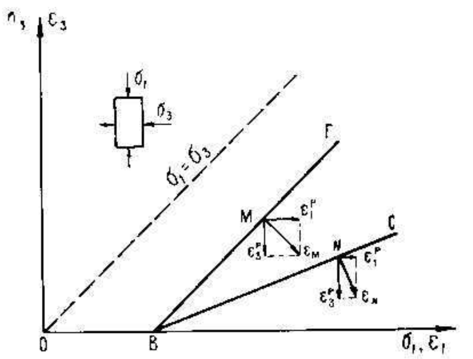

Рисунок 2. Графическое изображение ассоциированного закона течения в условиях плоской деформации.

В процессе решения задачи нагрузка прикладывается малыми ступенями в той последовательности, в какой происходит реальное нагружение в натуре. Решения для очередного, например, *n*-го шага нагрузки достигается точно по методу начальных напряжений. К началу шага известны суммарные напряжения в элементах от (*n*-1) предыдущих ступеней. К области прикладывается вектор сил и заданных перемещений очередной ступени нагрузки и в итерационном режиме повторяются упругие решения с изменяемыми векторами.

В очередном 1 - м цикле итераций в элементах вычисляется прирост деформаций $\{\Delta\varepsilon\}^{i}_{n}$, соответствующий им упругий прирост напряжений

$$\{\Delta\sigma^{у}\}^{i}_{n}=[D]\{\Delta\varepsilon\}^{i}_{n}, \qquad (11)$$

упругие напряжения

$$\{\sigma^{у}\}^{i}_{n}=\{\sigma\}_{n-1}+\{\Delta\sigma^{у}\}^{i}_{n}. \qquad (12)$$

«Фактический» прирост напряжений, равный разности между упругим приростом и накопленными на предыдущих (*n*-1) циклах итерации начальными напряжениями:

1.1.1. $\{\Delta\sigma^{ф}\}^{i}_{n}=\{\Delta\sigma^{у}\}^{i}_{n}-\{\sigma^{н}\}_{n}$. (13)

По заданной модели среды вычисляется «теоретический» прирост напряжений $\{\Delta\sigma^{т}\}^{i}_{n}$, соответствующий приросту деформаций $\{\Delta\varepsilon\}^{i}_{n}$. Разность между фактическим и теоретическим приростами рассматривается как приращение начальных напряжений:

1.1.2. $\{\Delta\sigma^{н}\}^{i}_{n}=\{\Delta\sigma^{ф}\}^{i}_{n}-\{\Delta\sigma^{т}\}^{i}_{n}$. (14)

По приращению начальных напряжений расчитывается добавка к вектору начальных сил. Начальное напряжение накапливается цикл за циклом в пределах шага нагрузки : $\boldsymbol{\{\sigma^{н}\}_{n}=\{\sigma^{н}\}_{n}+\{\Delta\sigma^{н}\}^{i}_{n}}$ **.**