УДК: 517.2

Шарипов К.С., Шарипов С.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Впервые краевые задачи и усовершенствованные краевые задачи решены по средствам зависимости решений от параметров.

Рассмотрим задачу Коши для одного уравнения или их системы с параметром вида

$y'=f(t,y,\beta),\ t\in[t_0,T]$ **(1)**

с начальным условием

$y(t_0)=y_0$ **(2)**

Здесь β – параметр (произвольная постоянная).

Отметим, что в теории дифференциальных уравнений доказана весьма важная теорема о существовании решения задачи Коши **(1)-(2)** и о непрерывности его по t и параметру β:

Теорема 1 [1-3]. Если функции $f(t,y,\beta)$ и $f'(t,y,\beta)$ непрерывны по всем независимым t и β в области $D=\{\ |t-t_0|\le a,\ |y-y_0|\le b,\ |\beta-\beta_0|\le c\}$, то решение задачи Коши **(1)-(2)** непрерывно по t и параметру β.

Доказательство данной теоремы проведено методом последовательных приближений и ломанных Эйлера (см. [1-3]).

Ранее, эту теорему использовали в регулярных и сингулярных возмущениях.

Теперь нами данная теорема использована в решении краевых и усовершенствованных краевых задач для дифференциальных (в том числе и в частных производных) и интегральных уравнений.

Итак, мы впервые исследуем задачу: о зависимости решений от краевых условий и параметров.

С этой целью предлагаем усовершенствовать задачу Коши **(1)-(2)**, это можно сделать, в частности, так: потребуем от решения этой задачи, чтобы оно в точке t=T принимает заданное значение:

$y(T)=y_1$ **(3)**

Тогда имеем краевую задачу вида

$y'=f(t,y,\beta),\ t\in[t_0,T]$ **(4)**

граничные условия

$y'(t_0)=y_0,\ y(T)=y_1$ **(5)**

Ее сведем к усовершенствованной задаче Коши с параметром вида

$y'=f(t,y,\beta),\ t\in[t_0,T]$ **(6)**

1)начальное условие

$y(t_0,\beta)=y_0,$ **(7)**

2) плюс, заданное условие в точке t=T

$y(T,\beta)=y_1$ **(8)**

Значит решение усовершенствованной задачи Коши **(6)-(8)** является также решением краевой задачи **(4)-(5).**

Задача Коши **(6)-(7)**, по вышеприведенной теореме, имеет непрерывное решение

$y=y(t,y_0,\beta),\ t\in[t_0,T]$ в области D. **(9)**

Отсюда, согласно условию **(8),** имеем при t=T алгебраическое уравнение относительно параметра β

$y(T,y_0,\beta)=y_1,$ **(10)**

которое выражается с граничными условиями y_0 и y_1!

Здесь может быть два случая:

1)Пусть уравнение **(9)** имеет единственное решение,

$\beta=m(y_0,y_1),\ y_0\in D(y_0),\ y_1\in D(y_1)$ **(11)**

Значит, параметр β порождается граничными условиями y_0 и y_1. Такой факт установлен впервые. Подставляя **(11)** в **(9)** имеем непрерывную функцию

$y=y(t,y_0,m(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(12)**

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши

$y'=f(t,y,m(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(13)**

1. Начальное условие

$y(t_0)=y_0$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(14)**

2. Плюс, заданное условие в точке t=T

$y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(15)**

Поэтому полученная функция **(12)** также является единственным решением краевой задачи.

$y'=f(t,y,m(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$,$y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(16)**

граничные условия

$y(t_0)=y_0$, $y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$ **(17)**

Теорема 2. При соблюдении **теоремы 1,** решение $y(t,\beta)$ задачи Коши **(6)-(7)** на корне $\beta=m(y_0,y_1)$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$

Уравнение **(10)** удовлетворяет условию

$y(T,m(y_0,y_1))=y_1$, $y_0xy_1\in D_1(y_0)xD_2(y_1)$

Отметим, что краевая задача **(16)-(17)** имеет решение на специальном параметре β вида **(11)!**

Теперь рассмотрим когда уравнение **(10)** имеет более одного корня. Пусть имеем два корня

$\beta_1=d_1(y_0,y_1)$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(18)**

$\beta_2=d_2(y_0,y_1)$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(19)**

Подставляя **(18)** в **(9)** имеем непрерывную функцию

$y=y(t,y_0,d_1(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$, **(20)**

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши вида

$y'=f(t,y,d_1(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(21)**

1) Начальное условие

$y(t_0)=y_0$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$. **(22)**

2) Плюс, заданное условие в точке t=T

$y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(23)**

Она также является решением краевой задачи

$y'=f(t,y,d_1(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(24)**

граничные условия

$y(t)=y_0$, $y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(25)**

Теорема доказана.

Теорема 3. При соблюдении **теоремы 1,** решение $y(t,\beta)$ задача Коши **(6)-(7)** на корне

$\beta_1=d_1(y_0,y_1)$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$ **(26)**

Уравнения **(10)** удовлетворяет условию

$y(T,d_1(y_0,y_1))=y_1$, $y_0xy_1\in Q_1(y_0)xQ_2(y_1)$

Аналогично, поставляя **(19)** в **(9)** также имеем непрерывную функцию

$y=y(t,y_0,d_2(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$, **(27)**

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши вида

$y'=f(t,y,d_2(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(28)**

1) Начальное условие

$y(t_0)=y0$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(29)**

2) Плюс, заданное условие в точке t=T

$y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(30)**

Она также является решение краевой задачи

$y'=f(t,y,d_2(y_0,y_1))$, $t\in[t_0,T]$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(31)**

граничные условия

$y(t_0)=y_0$, $y(T)=y_1$, $y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(32)**

Теорема 4. При соблюдении **теоремы 1**, решение $y(t,\beta)$ задачи Коши **(6)-(7)** на корне

$\beta_2=d_2(y_0,y_1),\ y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(33)**

уравнение **(10)** удовлетворяет условию

$y(T,d_2(y_0,y_1))=y_1,\ y_0xy_1\in Q_3(y_0)xQ_4(y_1)$ **(34)**

Аналогично можно показать, что если алгебраическое уравнение **(10)** имеет n корней, то краевая задача **(1)-(5)** распадается на n краевых задач, каждая из которых имеет единственное решение.

Теперь мы можем говорить о том, что параметр β входящий в уравнение **(4)** в то же время зависит от граничных условий y_0 и y_1.

Теперь рассмотрим обычную задачу Коши вида

$y'=f(t,y),\ t\in[t_0,T]$ **(35)**

начальное условие

$y(t_0)=y_0$ **(36)**

Известно, что при некоторых условиях, наложенных на функцию f(t,y), данная задача имеет единственное решение.

Теперь для уравнения **(35)** задаем граничные условия

$y(t_0)=y_0,\ y(T)=y_1$ **(37)**

Тогда имеем краевую задачу

$y'=f(t,y),\ t\in[t_0,T]$ **(38)**

граничные условия

$y(t_0)=y_0,\ y(T)=y_1$ **(39)**

Ее решаем сведением к усовершенствованной задаче Коши

$y'=f(t,y(t)),\ t\in[t_0,T],$ **(40)**

1) Начальное условие

$y(t_0)=y_0.$ **(41)**

2) Плюс, заданное условие в точке t=T

$y(T)=y_1.$ **(42)**

Решение данной задачи можем исследовать, если ее можно свести к усовершенствованной задаче Коши с параметром **(6)-(8).** Значит, в функцию f(t,y(t)) каким- то образом, надо ввести параметр β. Это можно сделать посредством функции, входящей в f(t,y(t)). Тем самым, мы построим решение усовершенствованной задачи Коши соответствующее ей. Такую функцию принято называть управляющей.

Способ введения параметра был рассмотрен нами, на примере задачи Коши вида **[4]**

$y'+p(t)y=q(t),\ t\in[t_0,T],$ **(43)**

начальное условие

y(t0)=y0 **(44)**

Лишь отметим, что аналогично исследуется, в частности, задача с параметрами вида.

$y' = f(t,y,\beta_1,\beta_2), t\in[t_0,T], \beta_1\in[d_1,d_2], \beta_2\in[C_1,C_2]$ **(45)**

с условиями

$y(t_0)=y_0, y(a)=y_1, y(T)=y_2\,(a\in(t_0,T))$ **(46)**

Продолжение этой статьи следует.

Литература:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. –М.,1958.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б. Дифференциальные уравнения. –М.,1979.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.,1982.
4. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциальных и интегральных уравнений// Вестник ИГУ, №12, 2004.