

## О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К ИЗМЕНЕНИЯМ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Определение механических и физических свойств горных пород необходимо для геомеханики, геофизики и геохимии в целях прогнозов и расчетов различных процессов, происходящих в земной коре в естественных условиях и особенно при искусственных воздействиях человека на природу.

Гидрогеологические параметры водоносных пластов, определяемые на основе методов геогидродинамики, используются в мелиорации и гидротехнике для расчета: 1) фильтрации воды из водохранилищ, каналов оросительной сети и на полях орошения; 2) действия горизонтального вертикального дренажа и коллекторно-дренажной сети; 3) фильтрации в теле, основании и в зоне береговых примыканий плотин и других гидротехнических сооружений.

Знание гидрогеологических параметров необходимо для водного хозяйства промышленности, городов и других населенных пунктов, где с помощью методов геогидродинамики рассчитываются подземные водозаборы, движение подземных вод в районах гидроузлов и каналов для водоснабжения, а также фильтрации из хранилищ жидких и твердых промышленных отходов.

В результате этих расчетов обычно определяются: 1) изменение глубин подземных вод, вызванные действием гидромелиоративных сооружений; 2) потери на фильтрацию из водохранилищ и каналов; 3) число, размещение и режим действия скважин на территориях подземных водозаборов, вертикального дренажа и водопонижительных установок.

Методы определения фильтрационных свойств водоносных пластов основаны на применении фундаментальных аналитических решений уравнений общей подземной гидродинамики, а также на использовании графоаналитических и численных приемов их решения, моделирования и расчетов на ЭВМ. Уравнения геогидродинамики решаются после существенных их упрощений, сводящихся к усреднению ряда входящих в них величин и линеаризации уравнений. Определяемые такими путями параметры отражают влияние этих упрощений, что снижает стабильность параметров и обуславливает их применимость в условиях, не слишком отличающихся от тех, при которых эти параметры были найдены.

Наиболее важными для гидрогеологических расчетов являются коэффициент фильтрации  $k$ , водопроницаемость  $T$ , свободная пористость пород  $n_0$ , пьезопроводность пластов  $a$ .

Гидрогеологические параметры экспериментально определяются двумя путями. Первый путь основан на создании в породах искусственного фильтрационного потока в условиях какой-либо простой схемы, для которой известно аналитическое решение, и регистрации в этом потоке напора, скорости и расхода воды. Подобные схемы обычно воспроизводят одномерную фильтрацию жидкости. Эти схемы создаются в

лабораторных условиях с помощью специальных приборов для определения параметров или в полевых условиях посредством откачек, нагнетаний, поливов и слежения за индикаторами в опытных скважинах и шурфах. Второй путь основывается на регистрации давления (напора) и скорости в естественных потоках подземных вод. Регистрация этих характеристик естественных потоков производится в специальных скважинах для наблюдений за гидродинамическим режимом подземных вод. Для определения параметров этим путем привлекаются также данные наблюдений за расходами в реках. Оба указанных пути позволяют определять гидрогеологические параметры пород, пластов и скважин прямыми методами.

Вероятные ошибки при определении гидрогеологических параметров экспериментальными методами довольно значительны [1], что обусловлено приближенным характером используемых при этом теоретических решений и обычно значительной неоднородностью и анизотропностью пород. Так, коэффициент фильтрации грунта  $k$  может быть оценен для хорошо проницаемых песчаных и гравийно-галечных пород с точностью до 10-30%, для малопроницаемых глинистых пород возможные ошибки при его определении доходят уже до двух раз, а для трещинно-пористых скальных пород – до 1,5-2 раз. Еще большие ошибки возникают при оценке пьезопроводности  $a$ , где они колеблются от 50% для песчаных и гравийно-галечных грунтов, до 3-5 раз для глинистых и скальных пород.

Распространение значений параметров, определенных лишь в ограниченном числе пунктов данного пласта или пород на весь массив или гидрогеологический регион, для которого выполняются расчеты, вносит дополнительную погрешность. С целью оценки этой погрешности применяются вероятностно-статистические методы, позволяющие для каждого генетически и литологически однотипного пласта или комплекса их установить необходимое число опытов, требующееся для обеспечения заданной точности оценки параметров.

В настоящее время получила распространение методика определения гидрогеологических параметров с помощью решения обратных задач. Сущность ее состоит в том, что значения параметров и их распределение в массиве пластов определяются из условия, чтобы поля напоров и скоростей совпадали с наблюдаемыми в опытных или режимных скважинах. Такая оценка параметров связана с решением математически некорректных задач, так как любому заданному полю этих характеристик может отвечать неограниченно большое число возможных распределений и численных значений параметров. Иначе говоря, такого рода обратные задачи не имеют единственного решения и потому применение этих способов оценки параметров требует разработки специальной методики, позволяющей выбрать из множества решений наиболее вероятное.

В гидрогеологической литературе такие задачи относятся к задачам идентификации и их отождествляют с обратными задачами математики. Здесь идентификация понимается в смысле установления соответствия изучаемого объекта с некоторой математической моделью, т.е. происходит идентификация геофильтрационной схемы и природных условий с математической моделью. Без

идентификации математической модели с изучаемым процессом невозможно получить адекватную модель процесса. В математическом плане обратные задачи чаще всего сводятся к отысканию коэффициентов дифференциальных уравнений или свободных членов по известным значениям функций и производной в отдельных точках области фильтрации. Как известно, такие задачи относятся к классу некорректных задач математической физики, сущность которых заключается в отсутствии непрерывной зависимости решения от входных данных, либо нехватки информации об искомым параметрах. В геофильтрационных задачах искомыми параметрами могут быть коэффициенты фильтрации, водопроницаемость или коэффициент гравитационной или упругой емкости водоносного пласта.

В работах [2, 3] показано, что обоснование однозначности решения обратных задач гидрогеологии проводится путем введения критерия физического правдоподобия, представляющего балансовую проверку соответствия объекта и модели. Он уменьшает неопределенность в подборе параметров, ограничивает возможный диапазон их изменения. За критерий обычно принимается величина абсолютного или относительного расхождения натуральных наблюдений и теоретических решений задачи, представленных отметками уровней, расходами или градиентами потока.

В основном существующие математические методы решения задач идентификации можно подразделить на две группы: 1) аналитические методы, позволяющие получать решение относительно искомого параметра и функции модели, эти методы иногда называют прямыми; 2) приближенные методы, использующие сложные итерационные процессы для целенаправленного поиска параметров, т.е. когда параметры последовательно учитываются от одного приближения к другому в процессе решения прямой задачи. В эту группу входят многие численные методы, отличающиеся своими подходами при решении этой проблемы.

В аналитических методах одним из подходов решения такой задачи является интегрирование уравнения стационарной напорной фильтрации

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

относительно известной функции  $T(x,y)$ , которое переходит в дифференциальное уравнение первого порядка

$$A(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} + C(x, y) T = 0 \quad (2)$$

где  $H(x,y)$ , – заданная функция напора,  $T(x,y)$ , – искомая функция водопроницаемости,

$$A(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x} \quad B(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y} \quad C(x, y) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

Как известно, такая задача имеет единственное решение, если заданы значения функции  $T(x,y)$ , вдоль какой – либо произвольной линии в области фильтрации, пересекающей все характеристики уравнения (2). Решение такой проблемы в изложенной постановке обладает значительными недостатками следующего характера: 1) в уравнении (2) содержатся производные первого порядка относительно водопродимостей  $T(x,y)$  и вторые производные относительно функции напора  $H(x,y)$ . Это означает, что функция напора  $H(x,y)$  является более гладкой функцией, чем водопродимость  $T(x,y)$ , т.е. большим изменениям водопродимости, согласно уравнению (1), будут отвечать малые изменения функции напора и наоборот, малые ошибки в величинах напоров могут приводить к большим ошибкам в искомым значениях водопродимости; 2) кроме погрешностей задаваемых величин функции напоров, обусловленных ошибками замеров, появляются погрешности при численной интерполяции производных первого и второго порядков относительно функции напора, содержащихся в коэффициентах  $A(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $C(x,y)$ . Как известно, численное дифференцирование является некорректной операцией, кроме того, значения напорной функции задаются только в ограниченных точках области фильтрации. Поэтому такой путь решения этой проблемы нецелесообразен не только из-за отсутствия необходимого объема информации, но и из-за неизбежной погрешности, появляющейся в численном дифференцировании.

При использовании приближенных методов идентификация параметров производится многократным решением краевых задач для уравнения (1) методом конечных элементов. Хотя при этом операция численного дифференцирования приближенно заданной функции  $H(x,y)$ , не выполняется, слабая зависимость функции напоров от водопродимости сохраняется, поскольку эта зависимость заложена в самой природе уравнения (1). Поэтому здесь возникает вопрос о чувствительности математической модели к входящим в нее параметрам. В связи с этим проведены численные эксперименты с целью приближенной оценки зависимости уровней грунтовых вод и напоров от коэффициента фильтрации и водопродимости.

В табл. 1. приведены результаты вычислительных экспериментов. Значения коэффициента фильтрации подвергаются возмущениям и вычисляться соответствующие значения уровней грунтовых вод. То же показано и на рис. 1.

Таблица 1

## Зависимость уровня грунтовых вод от коэффициента фильтрации

Номера узлов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Погр
Точные знач. УГВ	370,00	369,86	369,45	368,78	367,83	366,60	365,10	363,31	361,24	358,88	356,23	353,27	350,00	
Точные знач. Коэф. Филът.	25,00	14,99	7,67	5,00	7,67	15,00	25,00	35,00	42,32	45,00	42,32	34,99	24,99	
Возмущ. знач. Коэф. Филът.	22,50	13,40	6,88	4,50	6,91	13,50	22,50	31,50	38,09	40,50	38,09	31,50	22,50	10%
Прибл. знач. УГВ	366,30	366,17	365,77	365,10	364,15	362,90	361,45	359,68	357,63	355,31	352,60	349,73	346,48	1%
Возмущ. знач. Коэф. Филът.	17,50	10,50	5,38	3,55	5,40	10,51	17,59	24,55	29,65	31,56	29,59	24,53	17,51	30%
Прибл. знач. УГВ	351,52	351,38	350,95	350,38	349,44	348,27	346,87	345,16	343,19	340,89	338,43	335,59	332,45	5%
Возмущ. знач. Коэф. Филът.	13,00	7,55	3,79	2,50	3,79	7,60	12,59	17,48	21,18	22,50	21,19	17,50	12,55	50%
Прибл. знач. УГВ	331,16	331,02	330,67	330,04	327,37	326,25	324,95	323,35	321,56	319,42	318,82	316,18	313,28	11%
Возмущ. знач. Коэф. Филът.	5,00	2,85	1,46	1	1,48	2,85	4,75	6,65	8,00	8,56	8,04	6,65	7,75	80%
Прибл. знач. УГВ	314,52	314,38	314,04	313,46	312,50	311,65	310,37	308,80	307,07	305,04	302,81	300,28	297,56	16%
Возмущ. знач. Коэф. Филът.	0,26	0,15	0,08	0,05	0,09	0,15	0,25	0,35	0,42	0,45	0,43	0,35	0,25	100%
Прибл. знач. УГВ	292,36	292,20	291,88	291,28	290,56	289,62	288,43	287,04	285,38	283,55	281,45	289,09	276,48	19%

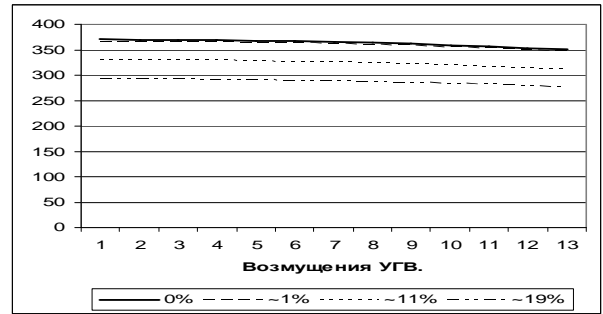
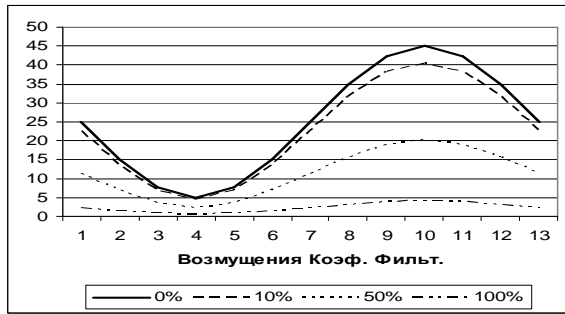


Рис. 1

а) изменения коэффициента фильтрации

б) соответствующие изменения УГВ

### Литература

1. Боревский Б.В., Самсонов Б.Г., Язвин Л.С. Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. – М.: Недра, 1973. – 304 с.
2. Джаманбаев М.Дж. Методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. -Бишкек: Илим, 1996.-121 с.
3. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. – М.: Недра, 1976. – 407 с.