

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕРЖНЯ

Рассматривается применение метода регуляризации А.Н. Тихонова к задаче определения коэффициента теплопроводности материала.

В задачах о распространении тепла возникает необходимость определения коэффициента теплопроводности среды, где происходит этот процесс. Часто не бывает возможности определить этот параметр экспериментальным путем. В таких случаях удобно использовать математические методы, в частности, методы идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений по известным их решениям. Такие задачи сводятся к решению коэффициентных обратных задач.

Рассмотрим задачу определения коэффициента теплопроводности в одномерном случае. Пусть в стержне длиной l установлен тепловой режим, на концах которого происходит теплообмен с окружающей средой.

Стационарное уравнение теплопроводности для стержня имеет вид [1]

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$-k(x)\frac{du}{dx} + \alpha_1 u = \beta_1, \quad x = 0, \quad (2)$$

$$k(x)\frac{du}{dx} + \alpha_2 u = \beta_2, \quad x = l, \quad (3)$$

Здесь $u(x)$ – температура стержня, $k(x)$ – коэффициент теплопроводности стержня, $f(x)$ – функция тепловых источников, α_i, β_i , $i = 1, 2$ – заданные параметры.

Требуется по некоторым известным экспериментальным значениям u^3 и k^3 определить функцию $k(x)$ на всем отрезке $[0, l]$. Поскольку значения температуры задаются с определенной погрешностью, то задача нахождения функции $k(x)$ из задачи (1) – (3) является некорректной, поэтому для ее решения применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [2]. В методе регуляризации наряду с количественной информацией используется также качественная информация об искомой функции. В данном случае мы используем экспериментальные значения u^3 и k^3 и потребуем, чтобы искомая функция была гладкой. Тогда задача сводится к нахождению функции $k(x)$, доставляющей на отрезке $[0, l]$ минимум функционалу

$$J(k) = \sum_{s=1}^q [u_s(k) - u_s^3]^2 + \gamma \sum_{r=1}^P (k_r - k_r^3)^2 + \alpha \|\delta k\|^2, \quad (4)$$

где u_s – расчетные значения температуры, определяемые из задачи (1)–(3); δk – вариация функции $k(x)$; q и P – число точек, где заданы экспериментальные значения функций $u(x)$ и $k(x)$ соответственно; α – параметр, регулирующий близость экспериментальных и искомого значений функции $k(x)$.

При каждом значении функции $k(x)$ получаем вполне определенные значения температуры $u(x)$, т.е. имеем оператор $u(k)$, в общем случае нелинейный. Линеаризируем его следующим образом:

$$u(k) = u(\tilde{k}) + \sum_{j=1}^n (k_j - \tilde{k}_j) \frac{\partial u}{\partial k_j} + R_2(k) \quad (5)$$

где \tilde{k}_j – значение функции $k(x)$ в точке x_j , полученное в предыдущей итерации; $R_2(k)$ – остаточный член разложения в ряд функции $u(k)$; n – число точек деления отрезка $[0, l]$.

Подставляя выражение для $u(k)$ из (5) формулу (4) и используя необходимое условие минимума функции и многих переменных, получаем.

$$\frac{\partial(J(k))}{\partial k_i} = \sum_{s=1}^q \left[\tilde{u}_s + \sum_{j=1}^n (k_j - \tilde{k}_j) \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_j} - u_s^\ominus \right] \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_i} + \gamma_i (k_i - k_i^\ominus) + \alpha (k_i - k_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} k_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

где

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^q \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_i} \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_j} \quad \text{при } j \neq i,$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^q \left(\frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_i} \right)^2 + \alpha + \gamma_i,$$

$$b_i = \sum_{s=1}^q \left(u_s^\ominus - \tilde{u}_s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_j} \tilde{k}_j \right) \frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial k_i} + \gamma_i k_i^\ominus + \alpha \tilde{k}_i,$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma, & \text{если } k_i^\ominus \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } k_i^\ominus \text{ не задано;} \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial k}$ является операторной производной, т.е. это матрица

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial k_i} \right) \quad \begin{matrix} s = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{matrix}$$

Матрица системы (7) является симметричной, имеет диагональное преобладание, поэтому задача минимизации функционала (4) становится устойчивой.

Для решения задачи по приведенному алгоритму на каждой итерации необходимо решать задачу (1) – (3) и определять $\tilde{u}(k)$. Она решается методом конечных элементов [3].

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя значения k^\ominus , образуется начальное приближение функции $k(x)$ в узлах сетки: $k_{\min}^\ominus \leq k_i^{(0)} \leq k_{\max}^\ominus$, $i=1,2,\dots,n$. Значения k^\ominus могут быть вообще неизвестными, тогда начальное приближение $k(x)$ задается произвольно (в разумных пределах, например, $0 < k_i^{(0)} \leq k_{\max}$ где k_{\max} берется из литературных источников). При значениях $k_i < k_i^{(0)}$ решается задача (1) – (3) и находится начальное приближение температуры $U_i^{(0)}$. Затем, придавая последовательно приращения Δk_i , к $k_i^{(0)}$, т.е. образуя функции $k^{(1)} = (k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, \dots, k_{i-1}^{(0)}, k_i^{(0)} + \Delta k_i, k_{i+1}^{(0)}, \dots, k_n^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и вычисляя соответствующие температуры $u_i^{(1)}$, определяем производные $\partial u / \partial k$ и решаем систему (7). На каждой итерации проверяется выполнение условия

$$\max_s |\tilde{u}_s - u_s^\ominus| \leq \varepsilon, \quad s = 1, 2, \dots, q \quad (8)$$

При выполнении условия (8) счет прекращается, в противном случае итерация проводится по параметру регуляризации α .

Алгоритм и программа отлаживались следующей тестовой задачей. Предположим, что температура на отрезке изменяется по линейному закону:

$u(x) = ax + b$, а искомая функция – по синусоидальному закону: $k(x) = c(\sin x + 2)$ и пусть $q(x) = 1$. Тогда $f(x) = -ac \cos x + ax + b$. В частности, параметры a, b, c принимают

значения $a=1$, $b=50$, $c=1,10,50,100$; $q=17,9,5,3,1$; $P=9,5,3,1,0$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.–735 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1974.–233 с.
3. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации почвогрунтов. //Доклады II Международной конференции «Проблемы управления и информатики». –Бишкек, 2007, Кн. 2.–с.107–112.