

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕРЖНЯ**

Численно решается задача оптимального управления распределением тепла в стержне с помощью тепловых источников.

Рассмотрим процесс распространения тепла в стержне длиной  $l$ , который описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

с начальным

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$-a^2 \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = \mu [q(t) - U(0, t)], \quad (3)$$

$$a^2 \frac{\partial U(l, t)}{\partial x} = \nu [p(t) - U(l, t)], \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

В уравнениях (1), (2) функция  $U(x, t)$  означает температуру стержня в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a^2$  – коэффициент теплопроводности;  $f(x, t)$  – плотность источников тепла;  $\varphi(x)$  – начальное распределение тепла в стержне. Граничные условия (3), (4) выражают обмен температурой с окружающей средой, где  $q(t)$  и  $p(t)$  – температура среды на левом и правом концах стержня соответственно,  $\mu, \nu$  – заданные параметры. Граничные условия (3), (4) для удобства изложения представим в виде

$$-a^2 \frac{\partial U(0, t)}{\partial x} + \mu \cdot U(0, t) = \beta_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3')$$

$$a^2 \frac{\partial U(l, t)}{\partial x} + \nu \cdot U(l, t) = \beta_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad \beta_1(t) = \mu \cdot q(t), \quad \beta_2(t) = \nu \cdot p(t),$$

Задача оптимального управления температурой стержня ставится следующим образом [3]. Требуется найти такую управляющую функцию  $f(x, t)$  которая при  $t = T$  доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \int_0^l [U(x, T; f(x, T)) - b(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T \int_0^l [f(x, t)]^2 dx dt, \quad (5)$$

где  $b(x)$  – заданная оптимальная температура,  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации. Функция  $f^0(x, t)$ , доставляющая минимум функционалу (5), называется оптимальным управлением, а соответствующее решение уравнения (1), т.е. функция  $U^0(x, t)$  – оптимальной температурой.

Для решения сформулированной задачи вводится сопряженная функция  $\psi(x, t)$ , которая является решением следующей сопряженной задачи [3]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (6)$$

$$-a^2 \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} + \mu \cdot \psi(0,t) = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

$$a^2 \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} + \nu \cdot \psi(l,t) = 0, \quad 0 \leq t < T,$$

с «начальным условием»

$$\psi(x, T) = -2[U(x, T) - b(x)] \quad (7)$$

и доказывается, что оптимальное уравнение выражается формулой

$$f^0(x, t) = \frac{1}{2\alpha} \psi(x, t). \quad (8)$$

Теперь рассмотрим алгоритм решения задачи (1) – (4) методом конечных элементов [2].

Образует прямоугольную сетку

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = l/(n-1);$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, n_t, \quad \tau = T/(n_t - 1)$$

и, заменив производную по времени разностным отношением

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U - \hat{U}}{\tau}, \quad \text{где } U = U(x, t_k), \quad \hat{U} = U(x, t_{k-1}),$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$-a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + Q \cdot U = F(x, t_k), \quad 0 < x < l, \quad U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

с граничными условиями (3), (4). Здесь

$$Q = 1/\tau, \quad F(x, t_k) = \hat{U}/\tau + f(x, t_k),$$

Задачу (9), (3'), (4') решаем методом конечных элементов. На частичном отрезке  $x_{i-1}, x_i$  образуем базисные функции

$$\varphi_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{h}, \quad \varphi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

и функцию  $U(x)$  на этом отрезке представим в виде

$$U(x) \approx \varphi_{i-1}(x)U_{i-1} + \varphi_i(x) \cdot U_i, \quad (10)$$

где  $U_i = U(x_i, t_k)$ .

Суммируя равенство (10) по всем элементарным отрезкам, получаем разложение для искомой функции

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n [\varphi_{i-1}(x)U_{i-1} + \varphi_i(x)U_i]. \quad (11)$$

К задаче (9), (3'), (4') применяем принцип Галеркина. Имеем

$$\int_0^l \varphi_i(x) \left( -a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + QU - F \right) dx + \varphi_j(x) \left( -a^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \cdot U - \beta_1(t) \right) \Big|_{x=0} +$$

$$+ \varphi_j(x) \left( -a^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \cdot U - \beta_2(t) \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

или после применения формулы Грина

$$\int_0^l a^2 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{dU}{dx} dx + \int_0^l Q\varphi_j(x)U dx - \int_0^l \varphi_j(x)F dx + \mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad j = 0, 1, K, n.$$

Поставляя вместо  $U(x, t_k)$  ее разложение (11), получаем

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} a^2 \frac{d\varphi_j}{dx} \left( U_{i-1} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} + U_i \frac{d\varphi_i}{dx} \right) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j (U_{i-1}\varphi_{i-1} + U_i\varphi_i) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(x)F dx \right\} + (12)$$

$$+ \mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad j = 0, 1, K, n.$$

Так как функции  $\varphi_{i-1}(x)$  и  $\varphi_i(x)$  отличны от нуля только на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ , а вне его равны нулю, равенства (12) примут вид

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} a^2 \frac{d\varphi_i}{dx} \left( U_{i-1} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} + U_i \frac{d\varphi_i}{dx} \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a^2 \frac{d\varphi_i}{dx} \left( U_i \frac{d\varphi_i}{dx} + U_{i+1} \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} \right) dx +$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_i (U_{i-1}\varphi_{i-1} + U_i\varphi_i) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i (U_i\varphi_i + U_{i+1}\varphi_{i+1}) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i F dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i F dx + (13)$$

$$+ \mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad i = 1, 2, K, n-1$$

или  
где

$$a_i U_{i-1} + b_i U_i + c_i U_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, K, n-1, (14)$$

$$a_i = a^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_{i-1}\varphi_i dx,$$

$$b_i = a^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 dx + a^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{d\varphi_i}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i^2 dx,$$

$$c_i = a^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i\varphi_{i+1} dx,$$

$$d_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i F(x, t_k) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i F(x, t_k) dx.$$

При  $i = 0$  получаем уравнение

$$b_0 U_0 + C_0 U_1 = d_0, (15)$$

где

$$b_0 = a^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\varphi_0}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx + \int_{x_0}^{x_1} Q\varphi_0^2 dx + \mu,$$

$$C_0 = a^2 \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_0}^{x_1} Q\varphi_0\varphi_1 dx,$$

$$d_0 = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 F(x, t_k) dx + \beta_1.$$

При  $i = n$  имеем

$$a_n U_{n-1} + b_n U_n = d_n, (16)$$

где

$$a_n = a^2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left( \frac{d\varphi_{n-1}}{dx} \right)^2 dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}\varphi_n Q dx,$$

$$b_n = a^2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{d\varphi_{n-1}}{dx} \frac{d\varphi_n}{dx} dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} Q\varphi_n^2 dx + \nu,$$

$$d_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n F(x, t_k) dx + \beta_2.$$

Систему (14) – (16) решаем методом прогонки. Искомую функцию вычисляем по формуле

$$U_i = \alpha_i U_{i+1} + \beta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (17)$$

Тогда

$$U_{i-1} = \alpha_{i-1} \alpha_i U_{i+1} + \alpha_{i-1} \beta_i + \beta_{i-1}.$$

Подставляя выражение для  $U_{i-1}$  и  $U_i$  в уравнение (14), получаем формулы для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{a_i \alpha_{i-1} + \beta_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + \beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (18)$$

$\alpha_0$  и  $\beta_0$  находим из уравнений (15) и (17) при  $i = 0$ :

$$\alpha_0 = -c_0 / b_0, \quad \beta_0 = d_0 / b_0. \quad (19)$$

из уравнений (16) и (17) при  $i = n-1$  определяем  $U_n$ :

$$U_n = \frac{d_n - a_n \beta_{n-1}}{a_n \alpha_{n-1} + \beta_n}. \quad (20)$$

Вычисления производятся в следующем порядке. По формулам (19) находятся  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , затем по формулам (18) вычисляются  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Значения искомой функции определяются по формулам (20) и (17) при  $i = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ .

Приводим один пример расчета оптимального управления. Пусть начальный момент времени  $t = 0$  температура в стержне равна нулю:

$$U_0(x) = U(x, 0) = 0.$$

Требуется за время  $T = 1$  привести температуру в оптимальное состояние, равное  $b(x) = 5(-2x + 10)$ .

В табл. 1. даны значения управляющей функции  $f(x, t)$  при  $z=T$ , а на рис. 1. изображены точные и приближенные значения оптимальной температуры.

Значения управляющей функции

Таблица 1.

$x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f_i$	50.	49.	48.	47.	45.	45.	44.	42.	41.	41.	39.
	12	03	07	13	86	07	09	75	91	05	81

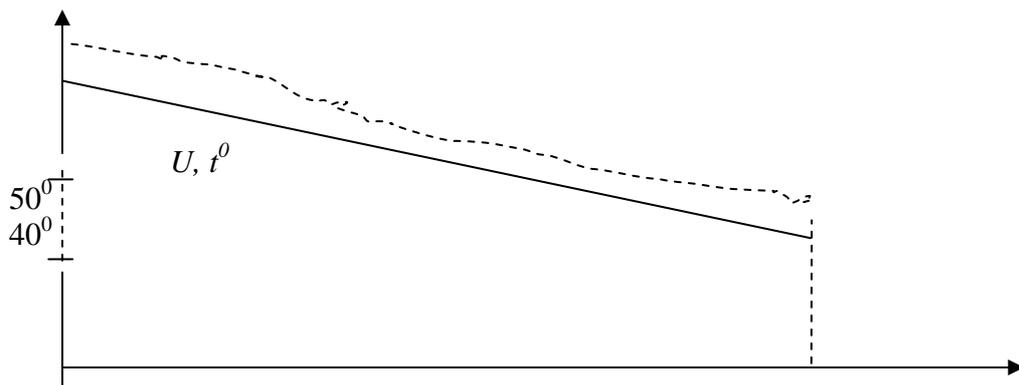




Рис.1. Графические функции

Рис. 1. Графики функции  $U_{opt}(x, T)$

————— точные значения  
----- приближенные значения

#### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир. 1979. –392 с.
3. Васильев П.Ф. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.