Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Кыргызский Государственный технический университет
им. И. Раззакова

Диссертационный совет
Д 01. 10. 406

На правах рукописи

УДК 532. 546 + 518.5

Байболотов Бакытбек Андабекович

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ И ВОДОПРОВОДИМОСТИ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат
диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

БИШКЕК – 2010

Работа выполнена в Ысык-Кульском государственном университете им. К.Тыныстанова

Научный руководитель: доктор физико- математических наук, профессор **Мурзакматов М.У.**

Официальные оппоненты: доктор физико- математических наук, профессор **Туганбаев У.М,** кандидат физико- математических наук, доцент **Токтакунов Т.Т.**

Ведущая организация: Кыргызско- Российский Славянский университет им. Б. Ельцина

Защита состоится 12 марта 2010 г. в 14.00 часов на заседании Межвузовского диссертационного Совета Д 01.10.406 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук при Кыргызском Государственном техническом университете им. И.Раззакова и Кыргызском Государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н.Исанова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Манаса, 66, 1/259.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского Государственного технического университета им. И.Раззакова.

Ваш отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью учреждения, просим направлять в адрес по месту защиты диссертации.

Автореферат разослан «____» _____________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного Совета Д 01.10.406,
к.ф.-м. н., доцент Ж.Ж.Доталиева

Утверждаю	Согласовано
зам. председателя НАК К	начальник отдел
__________________Бекболотов Т.	_____________________Ураимов М.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов идентификации основных гидрогеологических параметров (коэффициента фильтрации и водопроводимости) пористых сред.

Актуальность темы диссертации. В настоящее время развивается тенденция загрязнения поверхностных пресных вод и нехватка их для водопользования и водоснабжения вынуждает к интенсивному использованию подземных вод. Это приводит к необходимости проведения обширных теоретических исследований крупных месторождений подземных вод (МПВ). Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо приводить в соответствие математическую модель к изучаемому объекту с помощью идентификации основных гидрогеологических параметров среды.

При проведении гидрогеологических расчетов исследователи не располагают полной информацией о количественных характеристиках уравнений движения подземных вод. Из – за недостаточности информации исследователи вынуждены использовать в математической модели не вполне обоснованные значения гидрогеологических параметров. Наиболее доступным и экономичным методом определения гидрогеологических параметров является приближенное решение идентификационных задач для дифференциальных уравнений теории фильтрации подземных вод. Поэтому разработка и апробация алгоритмов идентификации гидрогеологических параметров является актуальной проблемой.

В работе использованы два метода решения идентификационных задач: метод регуляризации акад. А.Н. Тихонова и метод малых возмущений, разработанный проф. Ч. Джаныбековым, на основе которых созданы устойчивые алгоритмы вычисления приближенных значений гидрогеологических параметров.

Тема диссертации связана с научными программами «Разработка принципов, методов, технических средств и базовой информационной системы прогнозирования экологического состояния подземной гидросферы», выполненной в Институте автоматики НАН КР в 1998 – 2005.гг. (№ госрегистрации 0000903) и «Исследование динамики подземных вод численными методами», выполняемой на кафедре прикладной математики ЫГУ им. К. Тыныстанова в 2005 – 2009 гг. (№ госрегистрации 0004241).

Цель диссертации состоит в разработке и реализации эффективных алгоритмов приближенного решения многомерных идентификационных проблем теории фильтрации подземных вод, основанных на фундаментальных методах прикладной математики.

Задачи диссертационной работы заключались:

– в проведении анализа имеющихся в литературе методов решения обратных задач математической физики;

– в исследовании чувствительности математической модели к изменениям основных гидрогеологических параметров;

– в разработке алгоритмов на базе современных приближенных методов теории некорректных задач и применении их к задачам идентификации гидрогеологических параметров водоносных пластов.

Научная новизна работы. Разработаны устойчивые алгоритмы решения задач идентификации гидрогеологических параметров пористых сред, основанные на методе регуляризации А.Н. Тихонова и на методе малых возмущений Ч. Джаныбекова.

Теоретическая и практическая значимость. Методика идентификации гидрогеологических параметров, основанная на методах регуляризации и теории малых возмущений, является важным приложением указанных методов в практике гидрогеологических расчетов. Построен комплекс регуляризирующих алгоритмов, идентифицирующих основные гидрогеологические параметры. Разработанные алгоритмы и программы могут применяться в гидрогеологических расчетах, а также в учебном процессе для чтения спецкурсов и выполнения дипломных работ по прикладной математике.

Экономическая значимость полученных результатов. Предлагаемая методика идентификации гидрогеологических параметров может применяться в гидрогеологических изысканиях, частично заменяя дорогостоящие опытно – фильтрационные работы.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Проведен анализ существующих методов приближенного решения обратных задач гидрогеологии и чувствительности математических моделей движения подземных вод к изменениям коэффициента фильтрации и водопроводимости пористых сред.
2. Разработаны алгоритмы решения обратных задач гидрогеологии на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова.
3. На базе метода малых возмущений Ч. Джаныбекова разработаны регуляризирующие алгоритмы, учитывающие количественную и качественную информацию об искомых параметрах и идентифицирующие гидрогеологические параметры в многомерных уравнениях подземной фильтрации.
4. С помощью разработанных алгоритмов в тестовых задачах идентифицированы неизвестные гидрогеологические параметры неоднородной пористой среды в одно – , двух – и трехмерных случаях. Показаны эффективность и надежность методов регуляризации и малых возмущений в проблеме идентификации гидрогеологических параметров.
5. Алгоритмы и программы использовались для идентификации коэффициента фильтрации почвогрунтов массива междуречья Джергалан – Каракол – Ак-Суу Ысык-Кульской области.

Личный вклад соискателя. Изучение и анализ существующих методов решения некорректных задач. Разработка алгоритмов и программ решения задач идентификации гидрогеологических параметров в многомерных уравнениях подземной геофильтрации методами регуляризации и малых возмущений. Часть работ, связанная с проведением экспериментов с использованием информационных технологий и обработкой полученных результатов проведена лично соискателем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований диссертации обсуждались: на Международном научно-техническом симпозиуме «Образование через науку», посвященном 50 – летию ФПИ – КТУ им. И. Раззакова (Бишкек, 2004г.), на второй Международной конференции по электронике и компьютерным технологиям IKECCO’2005 (Бишкек, 2005г.), на II Международной конференции «Проблемы управления и информатики» (Бишкек, 2007г.), на научном семинаре секции физико-математических и технических наук НТС, на VII-ежегодной летней школе ученых-механиков Кыргызстана (Каракол, 2008 г.), на семинарах кафедр прикладной математики КГУСТА, ЫГУ им. К. Тыныстанова (Каракол, 2000 – 2009 гг.), и лаборатории Института автоматики НАН КР (Бишкек 2003 – 2008гг.).

Опубликованность результатов. Содержание диссертации изложены в 9 научных статьях, опубликованных в рецензируемых научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения, изложенных на 110 страницах машинописного текста, содержит 11 таблиц, 9 рисунков и список использованной литературы из 89 наименований.

Краткое содержание работы

В **введении** изложены актуальность задач идентификации, цели и задачи диссертации, методы исследования и научная новизна, обоснованность и достоверность результатов исследований, практическая теоретическая ценность работы и основные положения, выносимые на защиту.

В **первой** главе даны краткая историческая справка о развитии математических методов в гидрогеологии и обзор методов решения идентификационных задач; на основе анализа особенностей гидрогеологических задач делается вывод об их естественной некорректности. Возникло новое направление, связанное с теорией управления гидрогеологическими системами, их идентификацией на основе использования данных наблюдений за функционированием гидрогеологического объекта. Этому способствует развитие общей теории управления системами, теории идентификации их состояний и параметров. Новые задачи требуют дальнейшего развития теории и методики решения обратных задач.

Далее исследуется чувствительность математических моделей к изменениям основных гидрогеологических параметров. Вероятные ошибки при определении гидрогеологических параметров экспериментальными методами довольно значительны, что обусловлено значительной неоднородностью и анизотропностью пород. Так, коэффициент фильтрации грунта k может быть оценен для хорошо проницаемых песчаных и гравийно-галечных пород с точностью до 10 – 30%, для малопроницаемых глинистых пород возможные ошибки при его определении доходят уже до двух раз, а для трещинно-пористых скальных пород – до 1,5 – 2 раз. Еще большие ошибки возникают при оценке пьезопроводности *a*, где они колеблются от 50% для песчаных и гравийно-галечных грунтов, до 3 – 5 раз для глинистых и скальных пород.

Одним из подходов решения задач идентификации является интегрирование уравнения стационарной напорной фильтрации относительно неизвестной функции водопроводимости T. В уравнении содержатся производные первого порядка относительно T и вторые производные относительно функции напора *H*. Это означает, что функция *H* является более гладкой чем T, т.е. большим изменениям водопроводимости будут отвечать малые изменения функции напора.

При решении задач идентификации параметров слабая зависимость функции напоров от водопроводимости сохраняется, поскольку эта зависимость заложена в самой природе уравнения. Поэтому здесь возникает вопрос о чувствительности математической модели к входящим в нее параметрам. В связи с этим в работе проведены численные эксперименты с целью приближенной оценки зависимости уровней грунтовых вод и напоров от коэффициента фильтрации и водопроводимости.

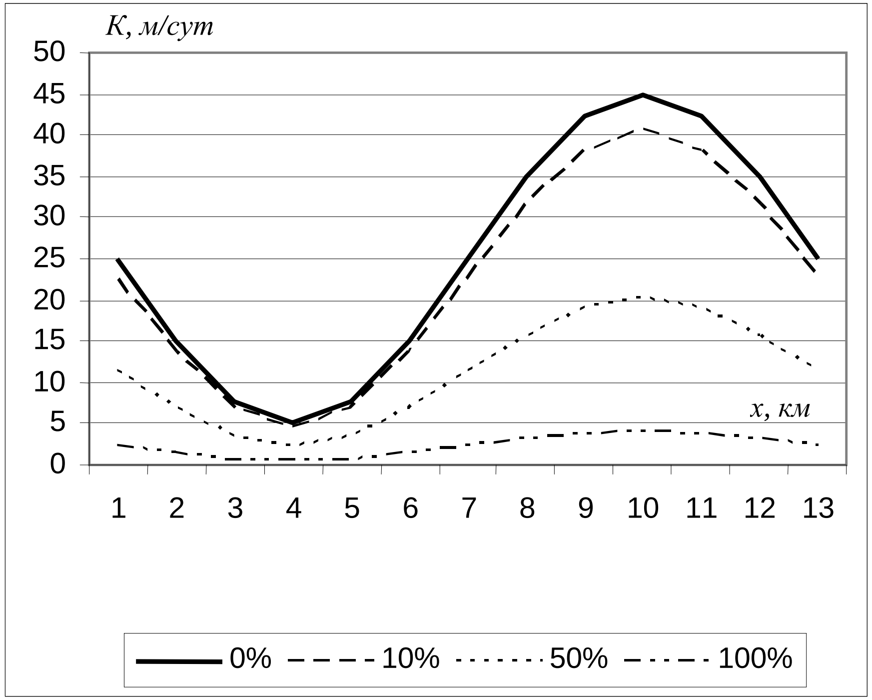
На рис. 1.1 показана зависимость уровней грунтовых вод от изменения коэффициента фильтрации. Результаты экспериментов показали, что при возмущении значений коэффициента фильтрации и водопроводимости на 10% соответствующие значения уровней грунтовых и напорных вод изменяются на ~ 1%, при 50 % ~ 10%, а при 100% – на ~ 20%.

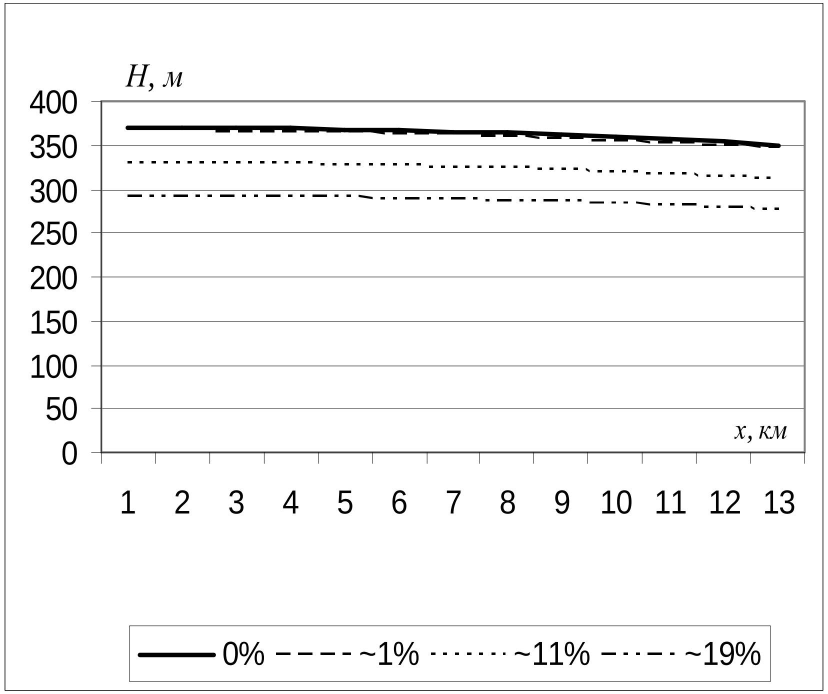
Во **второй** главе рассматривается применение метода регуляризации к решению задач идентификации гидрогеологических параметров. Разработан алгоритм решения одномерной задачи фильтрации грунтовых вод (рис. 2.1):

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$

(2.1)

$$H(x,0) = H_0(x), \quad 0 < x < l,$$





а) изменения коэффициента фильтрации

б) соответствующие изменения УГВ

Рис. 1.1

$$k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}=q(t),\ \ x=l,\ t>0.. \tag{2.2}$$

где $H(x\ ,t)$ – уровень грунтовых вод (УГВ); $k(x)$ – коэффициент фильтрации; $\mu(x)$ – водоотдача или недостаток насыщения; $f(x,t)$ – инфильтрация; $b(x)$ – водоупор; $q(t)$ – величина расхода (оттока) грунтовых вод.

С помощью алгоритма численно решена задача о промывке, известная из литературных источников и получено хорошее приближение (с точностью до сантиметра) к аналитическому решению.

Решена задача идентификации коэффициента фильтрации почвогрунтов. Задача сводится к нахождению функции *k(x)*, сообщающей на отрезке [*a*, *b*] минимум функционалу

$$\Phi(k)=\sum_{s=1}^{q}\left(H_s(k)-H_s^{э}\right)^2+\gamma\sum_{r=1}^{p}\left(k_r-k_r^{э}\right)^2+\alpha\left|\delta k\right|^2, \tag{2.3}$$

Здесь $H^Э$ и $k^Э$ – заданные экспериментальные значения функций *H(k)* и *k(x)*; *p* и *q* – число точек, где они заданы соответственно; γ – параметр (штраф), регулирующий близость экспериментальных и искомых значений функции *k*; δk – вариация функции *k(x)*; *H(k)* – расчетные значения уровней грунтовых вод, которые находятся как решение задачи (2.1) – (2.2); α – параметр регуляризации.

В качестве $H^Э$ и $k^Э$ берутся значения, определенные опытным путем в некоторых точках. Чтобы иметь начальное приближение функции *k(x)* во всех узлах сетки, проведем интерполяцию этой функции с помощью сплайн - функций. Пусть экспериментальные значения функции $k^{Ý}$ заданы в точках x_j, $j = 1, 2, \dots q;\ q < n,$ где *n* – число узлов расчетной сетки. На отрезке [$x_{j-1}-x_j$] функцию *k(x)* представим в виде кубического многочлена

$$k(x)=M_{j-1}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+M_j\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}+\left(k_{j-1}^{Ý}-\frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j}+$$
$$+\left(k_j^{Ý}-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j},\qquad j=2,3,\mathrm{K}\ q, \tag{2.4}$$

где $h_j=x_j-x_{j-1}$, а «моменты» M_j определяются из системы уравнений

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j+\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}=\frac{k_{j+1}^{Ý}-k_j^{Ý}}{h_{j+1}}-\frac{k_j^{Ý}-k_{j-1}^{Ý}}{h_j}. \tag{2.5}$$

Чтобы найти приближенные значения функции *k(x)* во всех узлах расчетной сетки, достаточно вместо *x* подставить абсциссу узла и вычислить соответствующее значение *k*.

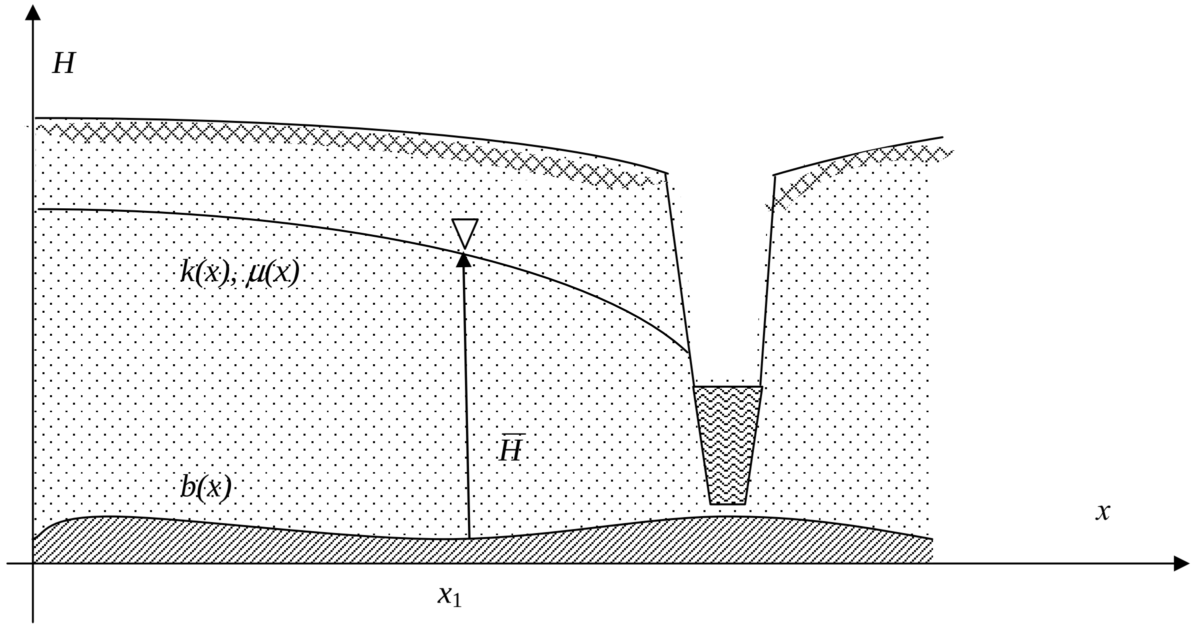


Рис. 2.1 Схема одномерной фильтрации грунтовых вод

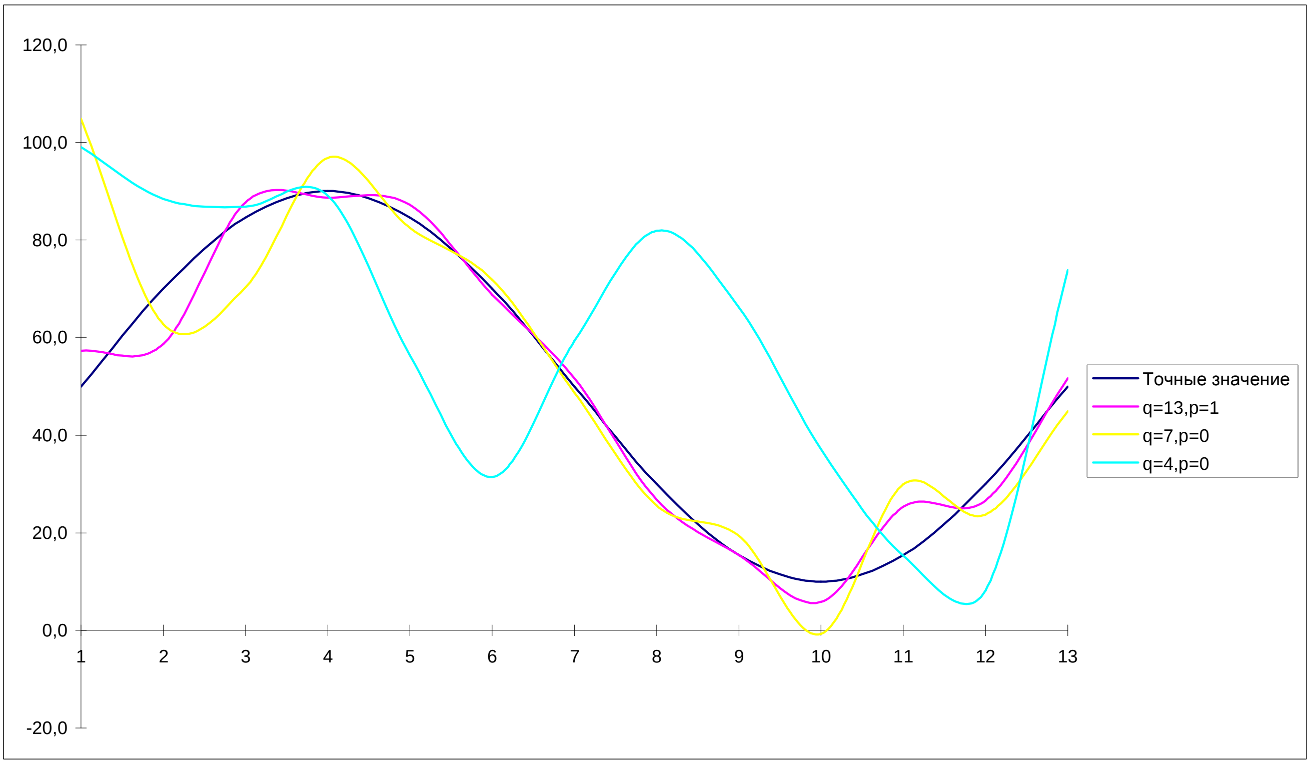


Рис 2.2 Точные и приближенные графики коэффициента фильтрации

Линеаризуя оператор *H(k)* и минимизируя функцию многих переменных $\Phi(k_i)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\frac{\partial(\Phi(k))}{\partial k_i}=\sum_{s=1}^{q}\left[\tilde{H}_s+\sum_{j=1}^{n}\left(k_j-\tilde{k}_j\right)\frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial k_j}-H_s^э\right]\frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial k_i}+\gamma_i\left(k_i-k_i^э\right)+\alpha\left(k_i-\tilde{k}_i\right)=0, \qquad (2.6)$$

или

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}k_j=b_i, \qquad i=0,1,...,n, \qquad (2.7)$$

где

$$a_{ij}=\sum_{s=1}^{q}\frac{\partial\tilde{H}_s}{\partial k_i}\frac{\partial\tilde{H}_s}{\partial k_j} \qquad i\neq j; \qquad a_{ii}=\sum_{s=1}^{q}\left(\frac{\partial\tilde{H}_s}{\partial k_i}\right)^2+\alpha+\gamma_i,$$

$$b_i=\sum_{s=1}^{q}\left[H_s^э-\tilde{H}_s+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{H}_s}{\partial k_j}\tilde{k}_j\right]\frac{\partial\tilde{H}_s}{\partial k_i}+\gamma_i k_i^э+\alpha\tilde{k}_i, \quad \gamma_i=\begin{cases}\gamma, & \text{если } k_i^э \text{ задано,}\\ 0, & \text{если } k_i^э \text{ не задано.}\end{cases}$$

На рис.2.2 показаны результаты решения тестовой задачи при различных значениях параметров q и p.

Далее решена задача по определению расхода (притока или оттока) грунтовых вод. Обычно расчеты выполнятся по формуле Дарси при наличии замеров УГВ хотя бы в двух точках. В работе предлагается алгоритм определения расхода грунтовых вод по замеру УГВ в одной точке (рис 2.1). Эта задача позволяет определить величину притока или оттока грунтовых вод по одному замеру УГВ в любой точке створа, что весьма важно в водохозяйственных расчетах.

Каждому значению оттока $q(t)$ в формуле (2.2) соответствует определенный УГВ в точке $x=x_k$, т.е. определен оператор $F(q)=H(x_k,t)$. Метод регуляризации использует качественную информацию об искомом решении. Он позволяет из всех функций $q(t)$, удовлетворяющих условию

$$\left\|F(q)-\overline{H}\right\|\leq\delta, \qquad (2.8)$$

выбрать в качестве решения самую гладкую. Такое решение обеспечивает минимум следующему сглаживающему функционалу:

$$M_\alpha(q)=\left\|F(q)-\overline{H}\right\|^2+\alpha\left\|q'\right\|^2, \qquad (2.9)$$

где $\alpha>0$ – параметр регуляризации. При этом погрешность, вносимая за счёт сглаживающего члена $\alpha>\left\|q'\right\|^2$, должна быть порядка погрешности измерений. Из – за нелинейности оператора $F(q)$ для минимизации функционала (2.9) используется итерационная последовательность функционалов

$$M_{k,\alpha}(q_{k+1})=\left\|F_q(q_k)+F'_q(q_k)(q_{k+1}-q_k)-\overline{H}\right\|^2+\alpha\left\|(q_k)'\right\|, \qquad (2.10)$$

где $F'_q(q_k)$ – операторная производная, которая аппроксимируется матрицей Якоби. Минимизируя функционал (2.10), определяется значение функции $q(t)$.

Затем решена задача идентификации водопроводимости напорного пласта в стационарном режиме. Рассматривается задача с недостаточными данными

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=f(x,y),\qquad (x,y)\in D\,, \tag{2.11}$$

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=\alpha+\beta H\,,\ \ (x,y)\in \varGamma=\partial D\,, \tag{2.12}$$

$$H(x_i,y_i)=H_i^{Э}\,,\qquad i=1,2,...,p, \tag{2.13}$$

$$T(x_j,y_j)=T_j^{Э}\,,\qquad j=1,2,...,q\,. \tag{2.14}$$

Задача заключается в определении функции $T(x,y)$ из уравнения (2.11) при соблюдении условий (2.12) – (2.14). Поскольку значения напоров задаются с определенной погрешностью и в недостаточном объеме, то задача нахождения коэффициента уравнения (2.11) является некорректной, поэтому для ее решения применяем метод регуляризации А. Н. Тихонова. Задача сводится к нахождению функции $T(x,y)$, сообщающей в области D минимум функционалу (2.3). Начальное приближение искомой функции определяется по формуле

$$T^{(0)}(x,y)=\sum_{i=1}^{p}T_i^{\acute{Y}}\varphi_i(x,\,y)$$

где суммирование производится по узлам, где заданы экспериментальные значения $T^{\acute{Y}}$. Здесь $\varphi_i(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_i(y)$– двумерный B – сплайн, а $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i(y)$ – одномерные кусочно-кубические B – сплайны, удовлетворяющие условиям $\varphi_i(\xi_i)=1$, $d\varphi_i(\xi_i)/d\xi=0$, $\varphi_i(\xi_j)=0$, $\varphi_i(\xi_k)=0$:

$$\varphi_i(\xi)=1+a_{\xi i}(\xi-\xi_i)^2+b_{\xi i}(\xi-\xi_i)^3\,,\ \xi=x,y.$$

Для определения поля функции $T(x,y)$ мы, наряду с количественной информацией (условия (2.13) и (2.14)), используем также качественную информацию об искомой функции, т. е. функционал $\varPhi(T)$ требует, чтобы функция $T(x,y)$ была гладкой, что соответствует физической природе водопроводимости. Минимизируя функционал $\varPhi(T)$, приходим к СЛАУ, аналогичной (2.7).

Работа алгоритма проверена на решении тестовых задач. Приведем одну из них. Область фильтрации и все функции, входящие в задачу, специально подобраны так, чтобы они обладали центральной и осевой симметрией и следовательно, искомое решение имело такие же свойства. Поэтому в табл. 2.1 приведены значения искомой функции только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2 и 4 являются граничными.

Таблица 2.1

Приближенные значения функции $T(x,y)$, полученные методом регуляризации

Узлы	Точные значения $T(x, y)$	Приближенные значения $T(x,y)$					
		$p=22$			$p=5$		
		$q = 17$	$q= 9$	$q= 5$	$q= 17$	$q= 9$	$q= 5$
2	499,92	525,50	545,99	561,49	526,50	453,08	434,51
4	499,97	474,50	454,00	438,50	473,50	453,00	429,50

5	804,68	846,03	879,03	903,97	847,65	880,64	910,45
10	929,68	977,41	1015,53	1040,35	979,00	1017,39	1001,69
16	929,61	977,41	1010,52	1044,34	979,26	1017,30	1051,77
17	982,42	930,89	891,61	861,15	929,90	1074,29	1110,69
26	998,05	947,10	906,17	875,24	945,00	900,40	867,25
27	981,09	930,96	890,74	860,33	929,01	920,82	1109,53
31	500,00	525,6	546,00	561,50	499,05	547,00	564,94
Отн. погр в %		5,1	9,2	12,3	6,1	9,4	13,4

В конце главы рассматривается применение метода регуляризации к идентификации коэффициента фильтрации в напорном комплексе подземных вод

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H}{\partial z}\right)=W\,, \qquad (x,y,z)\in V \qquad (2.15)$$

с краевым условием

$$k\frac{\partial H}{\partial n}+\beta H=\alpha\,, \qquad (x,y,z)\in\Sigma\,, \qquad (2.16)$$

Задача состоит в вычислении поля коэффициента фильтрации $k(x,y,z)$ при наличии экспериментальных значений этой функции и функции напоров $H(x,y,z)$:

$$H(x_r,y_r,z_r)=H^{Э}(x_r,y_r,z_r),\; r=1,2,\ldots,p, \qquad (2.17)$$

$$k(x_s,y_s,z_s)=k^{Э}(x_s,y_s,z_s),\; s=1,2,\ldots,q. \qquad (2.18)$$

Определить значения коэффициента фильтрации во всей области V опытно – фильтрационными работами невозможно. Мы должны доопределить функции $H(x,y,z)$ и $k(x,y,z)$ так, чтобы математическая модель (2.15), (2.16) единственным образом описывала рассматриваемый фильтрационный процесс.

Сеточную область строим так, чтобы экспериментальные значения (2.17), (2.18) попали в узлы сетки. Образуем начальное приближение функции по формуле

$$k^{(0)}(x,y,z)=\sum_{j=1}^{q}k_j^{Э}\varphi_j(x,y,z)\,,$$

где $\varphi_j(x,y,z)=\varphi_j(x)\varphi_j(y)\varphi_j(z)$, $\varphi_j(x),\varphi_j(y),\varphi_j(z)$ – одномерные B – сплайны относительно узла j.

Используя количественную и качественную информацию об искомой функции $k\,(x,y,z)$ и минимизируя сглаживающий функционал Тихонова, приходим к СЛАУ типа (2.7) с аналогичными коэффициентами.

Полученная система благодаря регуляризатору $\alpha|\delta k|^2$ и условиям (2.18) хорошо обусловлена и она легко решается методом Гаусса. Серьезным недостатком метода регуляризации является ее неэкономичность. Как следует из описания данного алгоритма, в каждой итерации прямая задача (2.15), (2.16) решается n раз (по числу узлов сетки), после чего решается система (2.7). Для получения искомого решения задачу (2.15), (2.16) приходится решать $n{\cdot}s$ раз, а систему (2.7) – s раз, где s – число итераций, которое предсказать невозможно.

В **третьей** главе идентификация коэффициента фильтрации пористой среды осуществляется методом малых возмущений.

Сначала изложена основная идея теории возмущений.

Рассмотрим краевую задачу

$$LH = f(x,y,z), \quad (x,y,z)\in V, \tag{3.1}$$

$$lH = \alpha(x,y,z), \quad (x,y,z)\in \Sigma = \partial V, \tag{3.2}$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad l = k\frac{\partial}{\partial n} + \beta. \tag{3.3}$$

Наша цель заключается в вычислении поля коэффициента фильтрации $k(x,y,z)$ при наличии приближенных значений $k^{(0)}(x,y,z)$, полученных путем наблюдений и измерений в r точках:

$$k^{(0)}(x_j, y_j, z_j) = k^{э}_j, \quad j=1,2,\ldots,r. \tag{3.4}$$

Пусть правые части уравнения (3.1) и краевого условия (3.2) получают малые возмущения (такая ситуация возникает, когда поле функции напора изменяется в результате отключения одной водозаборной дрены или скважины среди множества работающих скважин, а фильтрационные свойства грунта остаются неизменными) f' и α':

$$f' = f + \delta f, \quad \alpha' = \alpha + \delta\alpha,$$

где δf и $\delta\alpha$ – соответствующие вариации. При принятом допущении краевая задача (3.1) и (3.2) переходит в краевую задачу

$$LH' = f', \; H' = H + \delta H, \; (x, y, z)\in V, \tag{3.5}$$

$$lH' = \alpha', \quad (x,y,z)\in \Sigma. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) с учетом краевой задачи (3.1), (3.2) приходим к краевой задаче относительно вариации δH:

$$L\delta H = \delta f, \quad (x,y,z)\in V, \tag{3.7}$$

$$l\delta H = \delta\alpha, \quad (x,y,z)\in \Sigma. \tag{3.8}$$

Второй шаг вычислительной процедуры связан с вычислением δk. Он состоит из вычисления вариаций δH из (3.7) и (3.8) при заданных δf и $\delta\alpha$. Как видно из постановки, поле вариации δH вычисляется МКЭ совершенно аналогично задаче (3.1), (3.2).

Пусть теперь малые возмущения принимают не только правая часть уравнения, но и его коэффициент, т.е. изменяется также гидрогеологическая характеристика среды.

Итак, вместо задачи (3.1) и (3.2) имеем краевую задачу

$$L'H' = f'', \; f'' = f' + \delta f', \quad L' = L + \delta L, \quad (x,y,z)\in V, \tag{3.9}$$

$$l'H' = \alpha'', \; \alpha'' = \alpha' + \delta\alpha', \quad l' = l + \delta l, \; H' = H + \delta H, \; (x,y,z)\in \Sigma, \tag{3.10}$$

где

$$\delta L=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta k\frac{\partial}{\partial x}\quad\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta k\frac{\partial}{\partial y}\quad\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta k\frac{\partial}{\partial z}\quad\right),\qquad \delta l=\delta k\frac{\partial}{\partial n}+\delta\beta\,.$$

Исходя из уравнений (3.9) и (3.10) с учетом (3.5), (3.6) приходим к возмущенному уравнению

$$\delta L\acute{I}\ '=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta k\frac{\partial\acute{I}\ '}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta k\frac{\partial H'}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta k\frac{\partial H'}{\partial z}\right)=\delta f',\quad (x,y,z)\in V \qquad (3.11)$$

с возмущенным граничным условием

$$\delta\, l\acute{I}\ =\delta k\frac{\partial\acute{I}\ '}{\partial n}+\delta\beta\acute{I}\ '=\delta\acute{r}\acute{y},\qquad (x,\,y,\,z)\in\Sigma. \qquad (3.12)$$

Решение задачи (3.11) и (3.12) ищем в виде

$$\delta k_n=\sum_{i=1}^{n}\delta k_i N_i(x,y,z), \qquad (3.13)$$

где $\delta k_i = \delta k(x_i\,,y_i\,,z_i)$, $N_i(x,y,z)$ – линейные базисные функции.

Используя обобщенный принцип Галеркина для невязок, имеем

$$\int_V(\delta LH'_n-\delta f')N_j dv=-\int(\delta lH'_n-\delta\acute{r}\acute{y})N_j d\acute{r}P,\quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (3.14)$$

Подставляя (3.13) в (3.14), приходим к СЛАУ размерности $n\times n$ относительно δk_i :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_V N_i q(H',N_j)dv\right)\delta k_i=\int_\Sigma N_i(\delta\acute{r}\acute{y}-\delta\beta H')d\acute{r}P+\int_V N_j\delta f'dv, \qquad (3.15)$$

где

$$q(H',N_j)=\frac{\partial H'}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial H'}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial H'}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z},\quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (3.16)$$

Система (3.15) плохо обусловлена, оператор $q(N_i,H_n')$ не обеспечивает диагональное преобладание, так как напорная функция слабоизменяющаяся и ее производные по x и y практически постоянны. В такой ситуации внутренние условия (3.4) являются сильными регуляторами, но они задаются не во всех узлах, поэтому для ослабления некорректности системы (3.15) следует использовать дифференциальные свойства искомой функции. В частности, предполагая, что вариация функции $\delta k(x,y,z)$ близка к нулю, перепишем систему (3.15) в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_V N_i q(N_i,H_n')dv\right)\delta k_j+\mu\int_V N_i\delta k_i dv+\gamma\sum_{s=1}^{p}(\delta k_s-k_s^{\acute{y}}+\tilde{k}_s)=$$

$$=\int_V N_i\delta f'dv+\int_\Sigma N_i(\delta\alpha'-H_n'\delta\beta)d\sigma,\qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (3.17)$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta k_j = f_i, \qquad i = 1,2,...,n, \qquad (3.18)$$

где

$$a_{ij} = \int_V N_j q(N_i H_n')dv + \mu \int_V N_i N_j dv + \gamma,$$

$$f_i = \int_V N_i \delta f' dv + \int_\Sigma N_i(\delta\alpha' - H_n'\delta\beta)d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^{p} (k_s^{э} - \tilde{k}_s),$$

γ и μ – параметры регуляризации, $\tilde{k}$ – значения k из предыдущей итерации.

Решив систему (3.18), находим функцию $\delta k_n(x,y,z)$ и образуем первое приближение искомой функции

$$k^{(1)}(x,y,z) = k^{(0)}(x,y,z) + \delta k(x,y,z).$$

На этом одна итерация счета завершается.

Подставляя функции $k^{(1)}(x,y,z)$ в уравнения (3.1), (3.2) и повторяя шаги 1–3, получаем второе приближение $k^{(2)}(x,y,z)$ и т. д.

В целях проверки работы алгоритма и программы решены тестовые задачи. В табл. 3.1 приведены точные и приближенные значения искомой функции, соответствующие первому октанту, полученные методом малых возмущений (столбец *a*) и методом регуляризации (столбец *b*).

Из табл. 3.1 видно, что методом малых возмущений получается более точное решение по сравнению с методом регуляризации, к тому же метод регуляризации требует огромного количества вычислений, пропорциональных количеству узлов сетки. Например, в данном случае в методе регуляризации прямая задача (3.11), (3.12) решается 60 – 80 тысяч раз, поэтому данная идентификационная задача требует около 3 часов 20 минут машинного времени Pentium IV, тогда как эта же задача методом малых возмущений решается за время меньше минуты.

Таблица 3.1

Сравнение точных и приближенных значении коэффициента фильтрации

Знач. z	Узлы	Точн. знач.	Приближенные значения					
			p = 51		p = 27		p = 12	
			a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
z = 0	1	5,00	5,56	5,57	5,64	5,66	5,74	4,18
	5	8,04	8,90	8,92	9,03	9,07	9,19	9,31
	10	9,29	10,04	10,06	10,19	10,23	10,37	10,52
	12	4,99	5,56	5,57	5,64	5,66	5,74	4,18
	16	9,29	9,10	10,10	10,19	10,23	10,37	7,47
	26	9,98	8,90	8,85	8,70	8,67	8,52	8,36
	30	8,04	8,90	8,92	9,03	9,07	9,19	9,31
	35	9,82	10,00	10,50	10,26	10,30	10,45	9,97
z = 20	62	7,00	7,78	7,80	7,90	7,93	8,03	8,14

	66	10,04	11,10	11,15	11,29	11,33	11,48	11,64
	71	11,29	12,25	12,29	12,45	12,50	12,67	12,85
	73	6,99	7,46	7,78	7,90	7,93	8,03	8,14
	77	11,29	12,26	12,29	12,45	12,50	12,67	12,85
	87	11,98	10,65	10,62	10,45	10,40	10,23	10,03
	91	10,04	11,12	11,15	11,25	11,33	11,48	11,64
	96	11,82	13,32	12,35	13,00	12,57	12,75	12,93
	123	9,00	10,00	10,03	10,16	10,19	10,33	10,47
	127	12,04	13,34	13,38	13,55	13,60	13,78	13,97
	132	13,29	14,48	14,52	14,71	14,76	14,96	15,18
z = 40	134	8,99	10,11	10,00	10,16	10,19	10,33	10,47
	138	13,29	14,48	14,52	14,71	14,76	14,96	15,18
	148	13,98	12,43	12,39	12,19	12,14	11,93	11,70
	152	12,04	13,34	13,38	13,55	13,60	13,78	13,97
	157	13,82	14,54	14,58	14,78	15,83	15,07	15,26
Отн. погр. в %			11,5	11,3	13,1	13,5	15,1	16,8

Далее решена задача идентификации водопроводимости напорного горизонта методом малых возмущений. Алгоритм решения этой задачи аналогичен алгоритму задачи (3.1) – (3.4).

В табл. 3.2 решение тестовой задачи сравнивается с соответствующими результатами, полученными методом регуляризации. Сравнение показывает преимущество метода возмущений, которое имеет место несмотря на то, что экспериментальные значения напоров в данном случае вообще не задаются.

Таблица 3.2

Сравнение с результатами, полученными методом регуляризации

	q = 17		q = 9		q = 5	
	a	b	a	b	a	b
Абс. погр.	73,9	78,9	94,8	97,3	146,7	151,1
Отн. погр. в %	7,2	7,7	9,7	9,9	15,1	15,4

Примечание: a – погрешности, полученные методом малых возмущений,
b – погрешности, полученные методом регуляризации.

Затем рассмотренные методы идентификации водопроводимости пласта применены к конкретному гидрогеологическому объекту междуречье Джергалан – Каракол – Ак-Суу Ысык-Кульской долины. Решена задача по определению коэффициента фильтрации почвогрунтов в данном объекте с точностью, согласованной с точностью наблюдений и значениями коэффициента фильтрации, полученными в результате опытно-фильтрационных работ.

На рис 3.1 показаны изолинии коэффициента фильтрации рассматриваемого участка.

По всем перечисленным узлам вычислены относительные ошибки, например, для коэффициента фильтрации пласта средняя ошибка равна 28%, а для УГВ – 25%.

Заключение

1. Для составления адекватных математических моделей движения подземных вод для конкретных гидрогеологических объектов необходимо идентифицировать гидрогеологические параметры, т.е. установить соответствие изучаемого объекта с его математической моделью.

2. Анализ уравнений движения подземных вод показывает слабую зависимость уровней грунтовых и напорных вод от коэффициента фильтрации и водопроводимости пластов. Вычислительные эксперименты показали, что в используемых математических моделях при возмущении значений коэффициента фильтрации до двух раз изменения уровней грунтовых вод и напоров не превышают 20%.

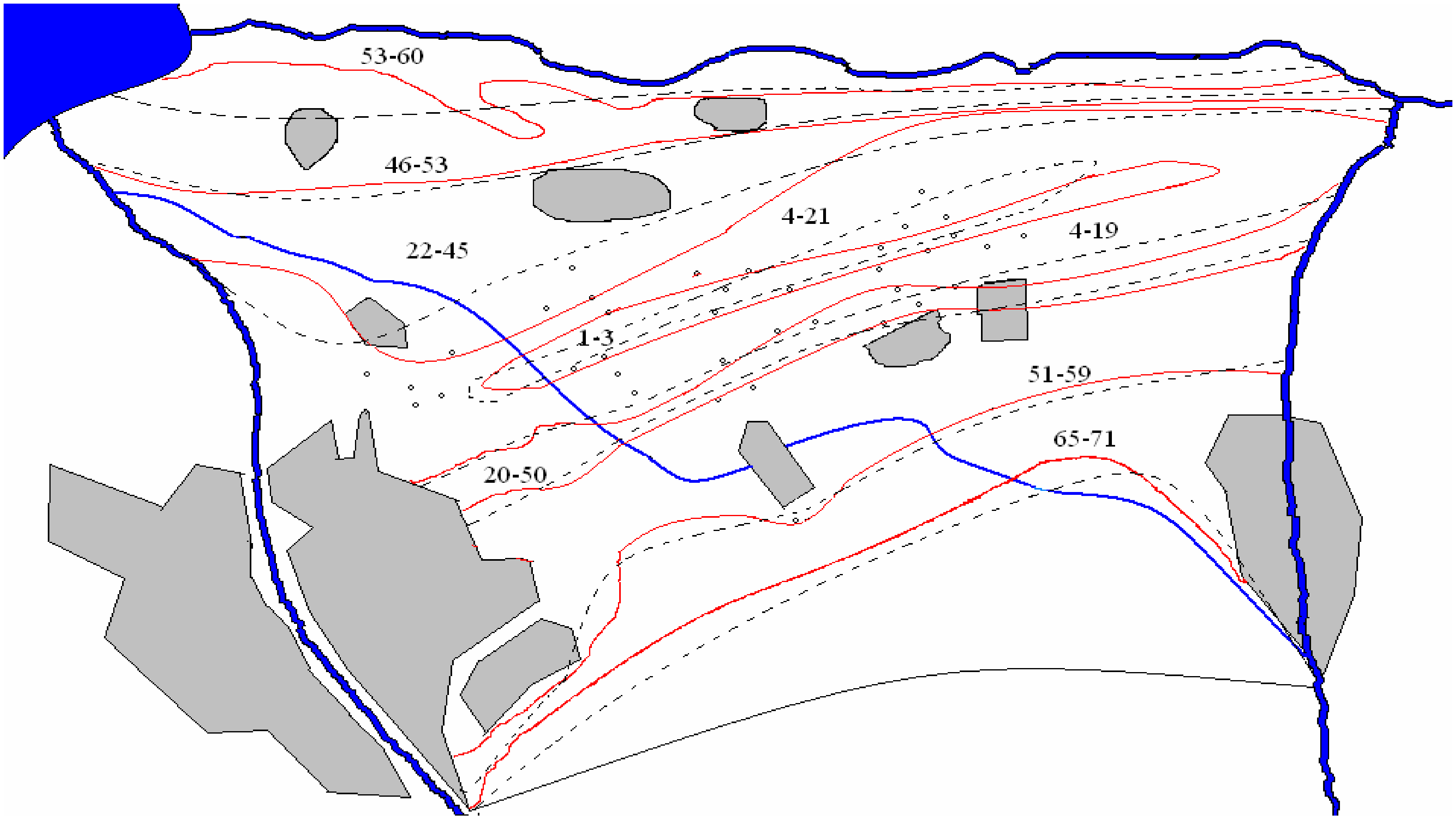


Рис. 3.1 Изолинии коэффициента фильтрации

– – – – – – экспериментальные; ________ вычисленные.

3. Метод регуляризации А.Н. Тихонова является эффективным методом решения некорректных задач идентификации. Надлежащим подбором стабилизирующего функционала построены регуляризирующие алгоритмы для определения коэффициента фильтрации и водопроводимости водоносных пластов в плоских и пространственных моделях фильтрации подземных вод. Недостаток метода регуляризации заключается в большом объеме вычислений, пропорциональном количеству узлов сетки. Этот недостаток делает невозможным применение данного метода при исследовании гидрогеологических объектов, требующих разбиения области фильтрации на большое число элементов.

4. На основе теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений разработаны и реализованы эффективные алгоритмы идентификации основных гидрогеологических параметров. Они легко реализуются на ЭВМ, для этого используется всего две стандартные подпрограммы: одна для решения прямых задач фильтрации (по этой же подпрограмме решаются и ретроспективные задачи), вторая – для решения систем линейных алгебраических уравнений.

5. Для построения начального приближения искомого параметра рекомендуется использовать интерполяционные сплайн – функции, позволяющие образовывать гладкую поверхность, максимально соответствующую искомой величине.

6. Погрешности задач идентификации довольно высокие. В модельных задачах коэффициенты фильтрации и водопроводимости определяются с погрешностью 20 – 25%. Эта погрешность связана с чувствительностью математической модели к изменениям искомых параметров, и, следовательно, она является неустранимой.

7. Описанная в работе методика идентификации параметров могут применяться в фильтрационных расчетах и в обучении студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Основные научные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Байболотов Б.А. Применение метода регуляризации к идентификации водопроводимости пласта // Вестник ИГУ, №15, Каракол, 2005. – С. 97-102.
2. Байболотов Б.А. Определение расхода грунтовых вод методом регуляризации. // Вестник ИГУ, №19, Каракол, 2007. –С. 30-34.
3. Байболотов Б.А. О чувствительности математических моделей к изменениям гидрогеологических параметров. // Вестник ИГУ, №21, Каракол, 2008. –С. 37-42.
4. Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации почвогрунтов на гидрогеологическом объекте // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск №10/ Гидрогазадинамика, геомеханика и геотехналогии, Бишкек, 2009.
5. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Байболотов Б.А. Об одном приближенном методе идентификации течения жидкости в пористых средах // Вестник ИГУ, №4, 2000.-С. 94-99.
6. Мурзакматов М. У., Байболотов Б. А. Об идентификации водопроводимости напорного потока методом теории возмущений // Материалы Международного научно – технического симпозиума «Образование через науку», т. 1. – Бишкек, 2004. – С. 188-192.
7. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации напорного пласта методом регуляризации // 2nd international conference on electronics and computer in Kyrqyzstan, Bichkek, 2005. – pp.186-191.
8. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации почвогрунтов методом регуляризации. // Вестник ТГТУ, том 12, №2А, Тамбов, 2006, –С. 424-429.
9. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации почвогрунтов. Докл. II Международной конференции «Проблемы управления и информатики», Бишкек, 2007. Книга 2., С.107-111.

Резюме
Байболотов Бакытбек Андабекович
Суулуу катмарлардын фильтрация коэффициентин жана суу өткөрүүчүлүгүн идентификациялоо

01.02.05. – «Суюктуктун, газдын жана плазманын механикасы» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты деген илимий даражаны алуу үчүн жазылган диссертация

Ачкыч сөздөр: борпоң чөйрө, суулуу катмар, чыпкалануу, чыпкалануу коэффициенти, суу өткөрүүчүлүк, математикалык моделдөө, гидрогеологиялык параметрлер, идентификация, регулярдоо, тескери маселе.

Диссертация жер астындагы суулардын чыпкалануу теориясынын колдонмо математиканын фундаменталдык методдоруна негизделген көп өлчөмдүү идентификациялык проблемаларын жакындатып чыгаруунун эффективдүү алгоритмдерин иштеп чыгууга жана колдонууга арналган.

Гидрогеологиянын математикалык моделдеринин борпоң чөйрөлөрдүн чыпкалануучулук касиеттерине сезгичтиги анализденген. А.Н. Тихоновдун регулярдоо методунун жана Ч. Джаныбековдун дүүлүктүрүү методунун негизинде иштелип чыккан негизги гидрогеологиялык параметрлерди аныктоо боюнча тескери маселелерди чыгаруунун алгоритмдери тесттик масселерди чыгарууда жана конкреттүү гидрогеологиялык объектти изилдөөдө колдонулган.

Диссертациянын жыйынтыктарын гидрогеологиялык эсептөөлөрдө жана студенттерди «Колдонмо математика жана информатика» адистиги боюнча окутууда пайдаланууга болот.

Резюме
Байболотов Бакытбек Андабекович
Идентификация коэффициента фильтрации и водопроводимости водоносных пластов

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы.

Ключевые слова: пористая среда, водоносный пласт, фильтрация, коэффициент фильтрации, водопроводимость, математическое моделирование, гидрогеологические параметры, идентификация, регуляризация, обратная задача.

Диссертация посвящена разработке и реализации эффективных алгоритмов приближенного решения многомерных идентификационных проблем теории фильтрации подземных вод, основанных на фундаментальных методах прикладной математики.

Проведен анализ чувствительности математических моделей гидрогеологии к изменениям фильтрационных свойств пористых сред. Алгоритм решения обратных задач по определению основных гидрогеологических параметров, разработанные на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова и метода малых возмущений Ч. Джаныбекова, применены в решении тестовых задач и в исследовании конкретного гидрогеологического объекта.

Результаты диссертации могут применяться в гидрогеологических расчетах и в обучении студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Abstract

Baybolotov Bakytbek Andabekovicsh

Identification of the filtration coefficient and permeability of water-bearing layers

The dissertation on competition of a scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences on a speciality 01.02.05 - Mechanics of a liquid, gas and plasma.

Key words: porous media, water-bearing stratum, filtration, filtration coefficient, permeability to water, mathematical modeling, hydro-geological parameters, identification, regulation, inverse problem.

The dissertation is devoted to development and realization of effective algorithms of the approached decision многомерных of identification problems of the theory of a filtration of underground waters based on fundamental methods of applied mathematics.

The analysis of sensitivity of mathematical models of hydrogeology to changes filtration of properties of porous media is carried out. Algorithm of the decision of return tasks by definition of the basic hydro-geological parameters developed on the basis of a method regulation A.N. Tishonov and method small perturbation Csh. Djanybekov, are applied in the decision of test tasks and in research of concrete hydro-geological object.

The results of the dissertation can be applied in hydro-geological accounts and in training the students of a speciality " Applied mathematics and information".