К. ТЫНЫСТАНОВ атындагы ЫСЫК-КӨЛ

МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

Колдонмо математика кафедрасы

М.У.Мурзакматов, М.Б.Шамырканов

ВЕКТОРЛОР ЖАНА АЛАР МЕНЕН ЖҮРГҮЗҮЛҮҮЧҮ АМАЛДАР

Математикалык эмес адистиктердин күндүзгү жана сырттан окуган студенттери үчүн усулдук колдонмо

Каракол 2010

УДК 514.1
ББК 22.151.5
М 91

ЫМУнун Окуу-методикалык бирикмеси (19.11.2009-ж. №3 токтому), Окумуштуулар кеңеши (24.12.2009-ж. №4 токтому) тарабынан басмага сунуш кылынды.

Рецензент: Физика-математика илим. канд., доц. К.Осмонов.

Мурзакматов М.У., Шамырканов М.Б.

М 91 Векторлор жана алар менен жүргүзүлүүчү амалдар /К.Тыныстанов атын. ЫМУ. – Каракол: 2010. – 12 б.

ISBN 978 – 9967 – 431 – 71 – 3

Усулдук колдонмодо векторлор жана алар менен жүргүзүлүүчү амалдардын теориясы, ар түрдүү типтеги көнүгүүлөрдүн чыгарылыштарына мисалдар жана өзүн-өзү текшерүү үчүн көнүгүүлөр берилген. Бул усулдук колдонмо математикалык эмес адистиктердин күндүзгү жана сырттан окуган студенттерине арналат.

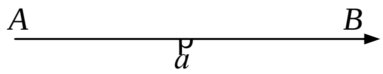
М 1602050000 – 09
ISBN 978 – 9967 – 431 – 71 – 3

УДК 514.1
ББК 22.151.5

Векторлор жана алар менен жүргүзүлүүчү амалдар

1-Аныктама. Багытталган кесинди (же иреттелген кош чекит) *вектор* деп аталат.

Вектор башкы жана аяккы чекиттерин көрсөтүү менен жазылып, тамгалардын үстүнөн жебе коюлат, мисалы $\overrightarrow{AB}$, же бир эле кичине тамга менен белгиленет, мисалы $\vec{a}$.

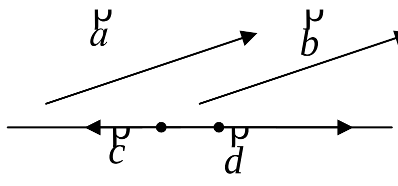


1-сүрөт

Эгерде жебе коюлбаса вектор жоон тамга менен жазылат. A чекитин вектордун *башталышы*, ал эми B чекитин вектордун *учу* деп айтабыз. Эгерде вектордун башталышы менен учу дал келишсе ал *нөл вектор* деп аталат, ал бир гана чекиттен турат жана $\vec{0}$ деп белгиленет.

Вектордун башкы жана аяккы чекиттеринин арасындагы аралык вектордун *узундугу* (*модулу, абсолюттук чоңдугу*) деп аталат жана $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ деп белгиленет. Бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жаткан векторлор *коллинеардуу* векторлор деп аталат . 2-сүрөттөн $\vec{a}$ менен $\vec{b}$ жана $\vec{c}$ менен $\vec{d}$ векторлору коллинеардуу.

Бир тегиздикке параллель векторлор *компланардуу* векторлор

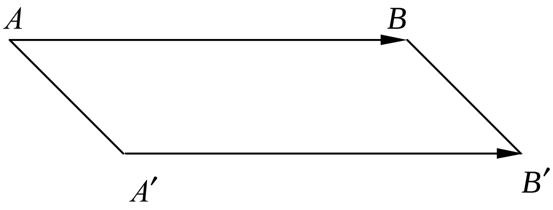


2-сүрөт

деп аталат. Нөл вектор ар кандай векторго коллинеардуу, анын узундугу, арийне, нөлгө барабар.

2-Аныктама. Эгерде эки коллинеардуу вектордун багыттары жана узундуктары бирдей болсо алар *барабар* деп аталат.

Аныктама боюнча, тандап алган A' чекитине берилген $\overrightarrow{AB}$ векторуна барабар болгон бир гана $\overrightarrow{A'B'}$ векторун кура алабыз (же $\overrightarrow{A\hat{A}}$ векторун жылдыра алабыз).



3-сүрөт

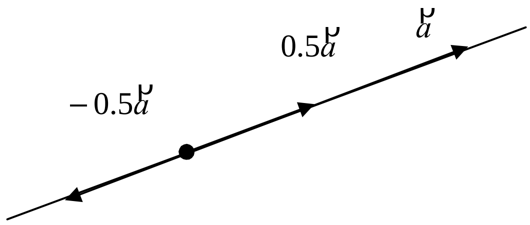
3-Аныктама. $\vec{a}$ вектору менен α чыныгы санынын *көбөйтүндүсү* деп, төмөнкү шарттарды канааттандыруучу $\vec{b}$ вектору аталат:

1. $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$,

2. $\vec{b}$ вектору $\vec{a}$ векторуна коллинеардуу,

3. Эгерде $\alpha > 0$ болсо $\vec{b}$ жана $\vec{a}$ векторлорунун багыттары бирдей, эгерде $\alpha > 0$ болсо багыттары карама-каршы (эгерде $\alpha = 0$ болсо 1 – шарт боюнча $\vec{b} = \vec{0}$).

Вектордун санга (скалярга) көбөйтүнүдүсү $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ деп белгиленет. Эгерде α менен β – сандар болсо, анда $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.



4-сүрөт

1–Теорема. Эгерде $\vec{a}$ – нөл эмес вектор, ал эми $\vec{b}$ – ага коллинеардуу ар кандай вектор болсо, анда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ болгудай бир гана λ саны табылат.

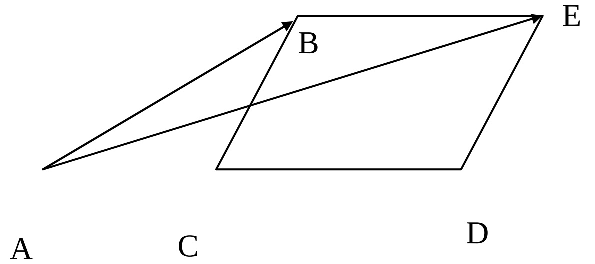
Далилдөө. Чындыгында эле λ саны $\left|\vec{b}\right|/\left|\vec{a}\right|$ же $-\left|\vec{b}\right|/\left|\vec{a}\right|$ санына барабар. Эгерде $\vec{a}$ менен $\vec{b}$ нын багыттары бирдей болсо, λ нын белгиси “+”, багыттары карама-каршы болсо белгиси “ – “ болоору бышык. Эгерде $\vec{b} = \vec{0}$ болсо $\lambda = 0$ болот. λ нын жалгыз болоору да түшүнүктүү – берилген $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлорунун узундуктарынын катышы да бир гана санга барабар.

4-Аныктама. $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлору берилсин. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ болгудай кылып E чекитин тандап алабыз. Анда $\overrightarrow{AE}$ вектору $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлорунун *суммасы* деп аталат жана $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ деп белгиленет (5-сүрөт).

Векторлорду кошуу жана санга көбөйтүү амалдары төмөнкү касиеттерге ээ болоорун текшерүү кыйын эмес:

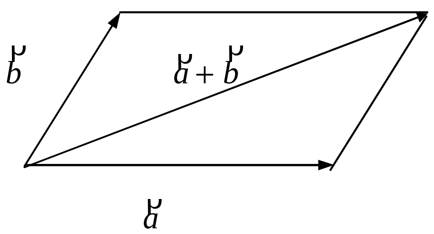
1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2^0. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$,
3^0. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$,
4^0. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

Ар кандай $\vec{a}$ векторуна нөл векторду кошкондо вектор өзгөрбөйт.

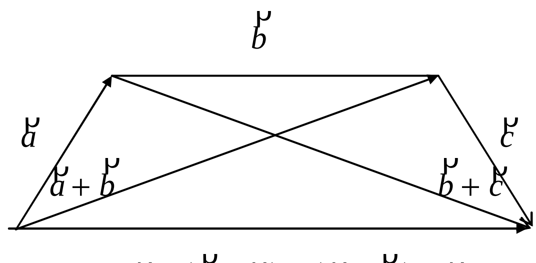


5-сүрөт.

Келтирилген аныктама *параллелограмм эрежеси* деп аталат, себеби $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлорунун суммасы ушул векторлорго курулган параллелограммдын диагоналына барабар.



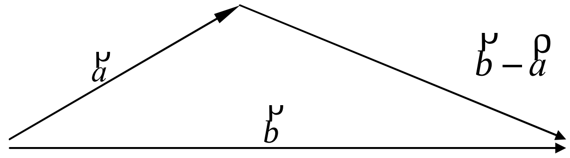
6-сүрөт



7-сүрөт

5–Аныктама. Берилген $\vec{a}$ вектору менен узундугу бирдей, ага коллинеардуу жана багыты карама-каршы вектор (б.а. $-1\cdot\vec{a}$ вектору) $\vec{a}$ га *карама-каршы вектор* деп аталат жана $-\vec{a}$ деп белгиленет. $\vec{b}$ жана $\vec{a}$ *векторлорунун айырмасы* $\vec{b}-\vec{a}$ деп $\vec{b}$ менен $-\vec{a}$ векторлорунун суммасы аталат.

Ар кандай вектор үчүн $\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ экендиги ачык. Эгерде векторлор бир чекиттен чыгышса, анда алардын айырмасы алардын учтарын бириктирген жана ”кемитүүчүдөн” “кемүүчүгө” багытталган вектор болот (8-сүрөт).



8-сүрөт

Эгерде $a=(x_1, y_1, z_1)$, $b=(x_2, y_2, z_2)$ болсо, анда $a+b=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ жана $a-b=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ болот.

Эгер $a=(x, y, z)$ болсо, анда каалагандай α саны үчүн $\alpha a=(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$ аткарылат.

Эгерде p жана q каалагандай коллинеардуу эмес векторлор болушса, анда алардын тегиздигинде жаткан бардык векторлор $a=\alpha p+\beta q$ түрүндө берилиши мүмкүн экенидигин далилдегиле. α жана β сандары a, p жана q векторлорунда бир маанилүү аныкталаарын далилдегиле.

Далилдөө: O тамгасы аркылуу берилген башталыштан a, p жана q векторлорун жүргүзөбүз (1-сүрөт). a векторунун аягын A тамгасы менен белгилейбиз. A чекити аркылуу q векторуна параллель түз сызык жүргүзөбүз. Бул түз сызыктын p вектору менен кесилишкен чекитин A_p аркылуу белгилейбиз. Аналогиялык түрдө, A чекити аркылуу p векторуна параллель түз сызык жүргүзүү менен q вектору менен кесилишкен A_q чекитине ээ болобуз.

Параллелограммдын эрежеси боюнча

$$a=\overline{OA}=\overline{OA_p}+\overline{OA_q} \qquad (1)$$

барабардыгына ээ болобуз.

$\overline{OA_p}$ жана p векторлору бир түз сызыкта жаткандыктан $\overline{OA_p}$ вектору p векторунун кандайдыр бир α санына болгон көбөйтүндүсү түрүндө алынуусу мүмкүн.

$$\overline{OA_p}=\alpha p \qquad (2)$$

Аналогиялык түрдө

$$\overline{OA_q} = \beta q \qquad (3)$$

(1), (2) жана (3) – барабардыктардан $a = \alpha p + \beta q$ экендигин алабыз. Демек, изделип жаткан ажыратуу далилденди. Эми, α жана β коэффициенттери бир маанилүү аныкталаарын далилдөө керек. a вектору $a = \alpha p + \beta q$, $a = \alpha' p + \beta' q$ ажыратууларына ээ жана $\alpha' \neq \alpha$ болсун. Биринен экинчисин мүчөлөп кемитүү менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$(\alpha' - \alpha) p + (\beta' - \beta) q = 0 \quad \text{же} \quad p = \frac{\beta - \beta'}{\alpha' - \alpha} q.$$

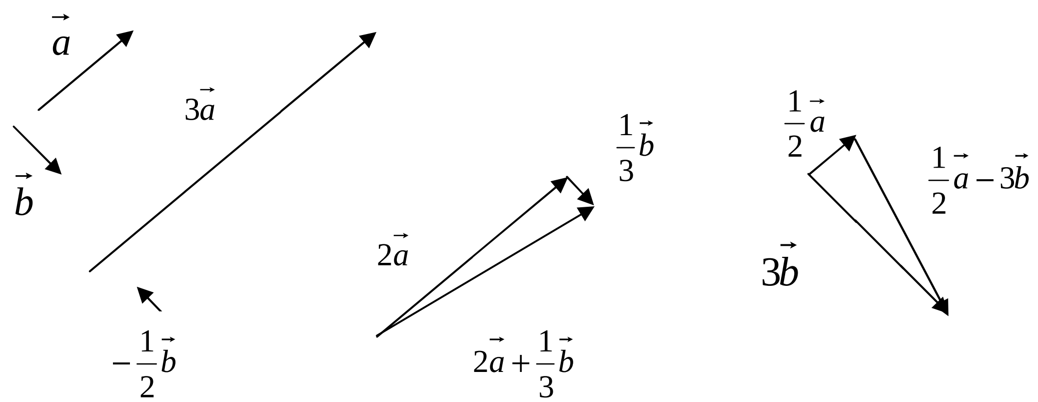
Бирок, бул барабардык p жана q векторлорунун коллинеардуулугун билдирет. Натыйжада $\alpha' \neq \alpha$ барабарсыздыгы мүмкүн эмес. Аналогиялык түрдө $\beta' \neq \beta$ барабарсыздыгы мүмкүн эмес. Ошол себептен $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$. Далилденди.

Мисалдар

№ . Берилген a жана b векторлору боюнча төмөндөгү векторлорду түзгүлө:

1) $3\grave{a}$; 2) $-\frac{1}{2}b$; 3) $2a + \frac{1}{3}b$; 4) $\frac{1}{2}a - 3b$

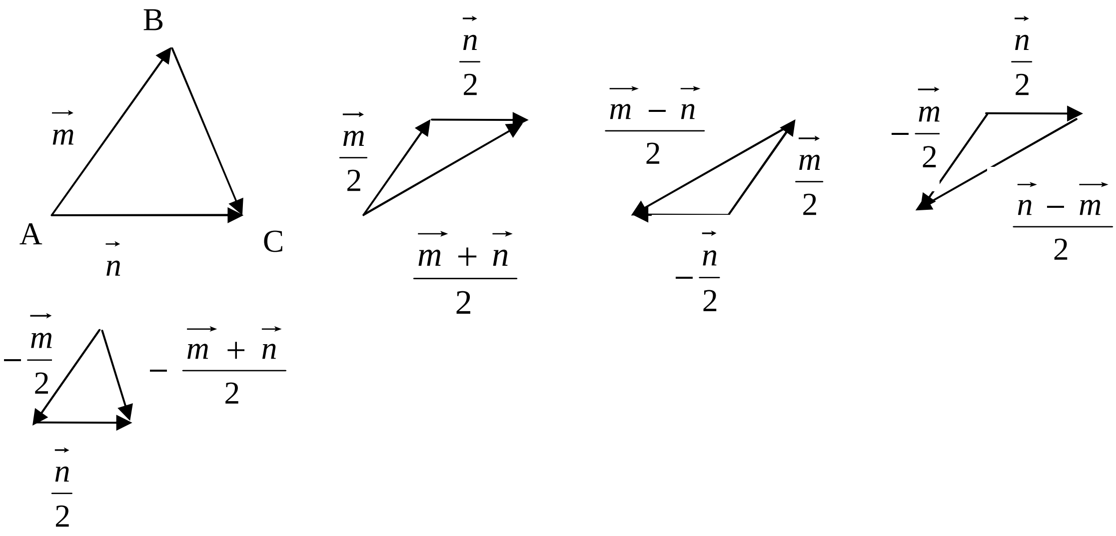
Чыгаруу:



№ 2. ABC үч бурчтугунда $\overline{AB} = m$ жана $\overline{AC} = n$. Төмөндөгү векторлордун ар бирин түзгүлө:

1) $\frac{m+n}{2}$; 2) $\frac{m-n}{2}$; 3) $\frac{n-m}{2}$; 4) $-\frac{m+n}{2}$

Чыгаруу:



№ 3. *a=(3, 4, 8)* жана *b=(2, 5, 7)* векторлору берилген. Төмөнкү амалдарды аткаргыла: 1) *a+b* 2) *a-b* 3) *3a-2b*.

Чыгаруу:

1) a+b=(3+2, 4+5, 8+7)=(5, 9, 15).
2) a-b=(3-2, 4-5, 8-7)=(1, -1, 1).
3) 3a=(3•3, 3•4, 3•8)=(9, 12, 24)
2b=(2•2, 2•5, 2•7)=(4, 10, 14)
3a-2b=(9 – 4, 12 – 10, 24 – 14)=(5, 2, 10).

№ 4. *a=(2, -1, 3)* жана *b=(– 6, 3, – 9)* векторлорунун коллинеардуулугун текшергиле. Алардын кайсынысы узунураак жана канча эсе экендигин аныктагыла.

Чыгаруу: Эки вектордун коллинеардуулук белгиси $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$ болгондуктан

$$\frac{-6}{2}=\frac{3}{-1}=\frac{-9}{3} \qquad -3=-3=-3.$$

Демек, a жана b векторлору коллинеардуу. Эми эки вектордун узундугун эсептейли.

$$|a|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

$$|b|=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-9)^2}=\sqrt{36+9+81}=\sqrt{126}=\sqrt{9*14}=3\sqrt{14}$$

$\frac{|b|}{|a|} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 3$. Демек, b вектору a векторунан үч эсеге узун.

№ 5. α жана β нын кандай маанилеринде $a = -2i + 3j + \beta k$ жана $b = \alpha i + 6j + 2k$ векторлору коллинеардуу экендигин аныктагыла.

Чыгаруу:

$\frac{\alpha}{-2} = \frac{6}{3} = \frac{2}{\beta}$ болгондуктан $\frac{\alpha}{-2} = 2$ жана $\frac{6}{3} = \frac{2}{\beta}$,

$\alpha = -4$, $6\beta = 6$, $\beta = 1$.

Демек, $\alpha = -4$, $\beta = 1$ болгондо берилген эки вектор коллинеардуу болот.

№ 6. *A(-1, 5, -10), B(5, -7, 8), C(2, 2, -7)* жана *D(5, -4, 2)* чекиттери берилген. Векторлору коллинеардуу экендигине текшергиле.

Чыгаруу:

$\overline{AB} = (5-(-1), -7-5, 8-(-10)) = (6, -12, 18)$

$\overline{CD} = (5-2, -4-2, 2-(-7)) = (3, -6, 9)$

Эми $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлорунун коллинеардуулугун текшеребиз.

$$\frac{6}{3} = \frac{-12}{-6} = \frac{18}{9} \qquad 2 = 2 = 2.$$

Демек, $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{CD}$ векторлору коллинеардуу.

№ 7. *a=(6, – 2,– 3)* векторунун ортун тапкыла.

Чыгаруу:

$a^0 = \frac{a}{|a|}$ формуласын колдонобуз.

$|a| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$, демек, $a^0 = \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

№ 8. *a=(3, 4, -12)* векторунун ортун тапкыла.

Чыгаруу:

Жогорудагы мисалдай эле чыгарабыз.

$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$, $a^0 = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.

Өз алдынча иштөөгө мисалдар

1. Вектордун башталышы $M(4,-3,5)$ жана аягы $N(6,-2,3)$ чекиттери менен дал келет. $\overrightarrow{MN}$ векторунун координаталарын, анын узундугун жана багыттоочу косинусун тапкыла.

2. a жана b векторлору берилген. Төмөнкү векторлорду түзгүлө:

$2a;\quad 3a+2b;\quad 4b-3a;\quad -2a-2b;\quad 2a-3b.$

3. $a=(1,-2,3),\quad b=(2,1,4),\quad c(-3,4,5)$ векторлору берилген. Төмөнкү векторлоду тапкыла: $3a;\quad 2b;\quad -4c;\quad a+b+c;\quad 2a-3b+4c.$

4. Үч бурчтуктун чокулары берилген: $A(7,5,-4),\quad B(4,9,1),\quad C(6,-3,-7)$.

A чокусунан жүргүзүлгөн медиананын узундугун, үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.

5. $A(-1,\ 0,\ -1)$ жана $B(2,\ 3,\ -1)$ векторлору берилген. $\overrightarrow{AB}$ векторунун багыттоочу косинустарын тапкыла.

6. $a=(4,\ -2,\ 6)$ жана $b=(-12,\ 6,\ -18)$ векторлорунун коллинеардуулугун текшергиле.

7. $A(3,-1,2),\quad B(1,2,-1),\quad C(-1,1,-3),\quad D(3,-5,3)$ чекиттери трапециянын чокулары болоорун текшергиле.

8. $A(2,\ 4,\ -5)$ жана $B(5,\ -7,\ 8)$ чекиттери берилген. $\overrightarrow{AB}$ жана $\overrightarrow{BA}$ векторлорунун координаталарын тапкыла.

9. Вектордун эки координатасы берилген: $X=1,\quad Y=-2$. Эгерде $|\vec{a}|=9$ экендиги белгилүү болсо, анда анын үчүнчү координатасы Z ти тапкыла.

10. $a=(2,-1,\ 2)$ жана $b=(3,\ -6,\ 2)$ векторлору берилген. $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ эмнеге барабар экендигин эсептегиле.

М.У. МУРЗАКМАТОВ, М.Б.ШАМЫРКАНОВ

Векторлор жана алар менен жүргүзүлүүчү амалдар

(Математикалык эмес адистиктердеги күндүзгү жана сырттан окуган студенттер үчүн методикалык колдонмо)

Тех. редактор: Жакыпова Ч.А.
Компьютердик калыпка салган: Жумашева Ж.Ж., Донoнбаева Д.А.

К.Тыныстанов атындагы ЫМУнун
Полиграфиялык комплексинде басылды
Заказ 319. Нуска 50.
Тел. 27716