

Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Кыргызский Государственный технический университет
им. И. Раззакова

Диссертационный совет
Д 01. 10. 406

На правах рукописи

УДК 532. 546 + 518.5

Исабеков Кубатбек Абдыкеримович

РЕШЕНИЕ ПРОГНОЗНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ
ВОД МЕТОДОМ ФРАГМЕНТОВ

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук

БИШКЕК – 2010

Работа выполнена в Ысык-Кульском государственном университете им. К.Тыныстаова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Мурзакматов М.У.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Исманбаев А.И.**,
кандидат физико-математических наук, доцент
Чечейбаев Б.Ч.

Ведущая организация: Институт водных проблем и гидроэнергетики НАН КР

Защита состоится 12 марта 2010 г. в 15.00 часов на заседании Межвузовского диссертационного Совета Д 01.10.406 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук при Кыргызском Государственном техническом университете им. И.Раззакова и Кыргызском Государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Манаса, 66, 1/259.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова.

Ваш отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенный печатью учреждения, просим направлять в адрес по месту защиты диссертации.

Автореферат разослан «_____» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
к.ф.-м. н.

Ж.Ж.Доталиева

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена разработке метода фрагментов, являющегося модификацией метода конечных элементов и применению его к решению задач гидрогеологии.

Актуальность темы диссертации. При обосновании проектов водозаборных и дренажных сооружений или крупных оросительных и осушительных систем необходимым условием является применение математического моделирования с использованием вычислительной техники. Это объясняется экономичностью и быстротой реализации проекта в жизнь.

Для решения задач гидрогеологии методами математической физики требуется, чтобы все необходимые свойства гидрогеологического объекта и его начальное состояние были известны в каждой его точке. Кроме того, должны быть известны возмущения и состояние объекта во всех точках ограничивающей его поверхности на каждый момент периода, для которого строится прогноз. Но природа гидрогеологических объектов такова, что их свойства и состояние могут быть определены только в ограниченном числе точек. При увеличении узлов расчетной сетки все известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) становятся неустойчивыми. Для выхода из создавшегося затруднения в работе применяется модифицированный метод конечных элементов (МКЭ), где область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, а потеря точности компенсируется использованием нелинейных базисных функций. Эта модификация условно названа методом фрагментов (МФ).

Из вышесказанного следует, что проблемы разработки и применения эффективных методов решения задач гидрогеологии являются актуальными.

Тема диссертации связана с научными программами “Разработка принципов, методов, технических средств и базовой информационной системы прогнозирования экологического состояния подземной гидросферы”, выполненной в Институте автоматизации НАН КР в 1998-2005 гг. (№ госрегистрации 0000903) и “Исследование динамики подземных вод численными методами”, выполняемой на кафедре прикладной математики БГУ им. К. Тыныстанова в 2005-2009 гг. (№ госрегистрации 0004241).

Цель диссертации заключается в разработке экономичных алгоритмов, пригодных для решения многомерных прямых задач теории фильтрации подземных вод в случае недостаточной информации о свойствах гидрогеологического объекта.

Задачи диссертационной работы состоят:

– в проведении вычислительных экспериментов с применением как линейных, так и нелинейных базисных функций в МКЭ с целью разработки экономичных алгоритмов, обеспечивающих достаточную точность для практики гидрогеологических расчетов при увеличении размеров расчетной сетки;

– в проведении количественного анализа движения подземных вод на базе математических моделей крупных месторождений подземных вод (МПВ) для выяснения степени искажения реального фильтрационного процесса в гидрогеологических объектах, вызываемого различными расчетными алгоритмами;

– в применении разработанных алгоритмов к реальному гидрогеологическому объекту для составления прогноза изменения уровня подземных вод.

Научная новизна работы. Разработана модификация метода конечных элементов, основанная на нелинейных базисных функциях и позволяющая компенсировать потерю точности при укрупнении расчетной сетки.

Теоретическая и практическая значимость. Построенная в работе модификация метода конечных элементов способствует совершенствованию процесса математического моделирования не только задач гидрогеодинамики, ну и многих прикладных задач. Экономичные приближенные алгоритмы, разработанные на основе нелинейных базисов, позволяют проводить фильтрационные расчеты на обширных гидрогеологических объектах. Основная идея работы и полученные в ней результаты могут применяться также в учебном процессе для специальности «Прикладная математика и информатика».

Экономическая значимость полученных результатов. Предлагаемая в работе модификация метода конечных элементов рассчитана на случай недостаточной информированности о свойствах исследуемого гидрогеологического объекта, следовательно, она не требует дополнительных натурных исследований.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Для случая кусочно-однородного строения водоносных пластов предлагается использовать модифицированный МКЭ, основанный на нелинейных базисах и названный методом фрагментов.

2. МКЭ и МФ реализованы двух- и трехмерные модели движения подземных вод в стационарном и нестационарном режиме.

3. На тестовых задачах проведен сравнительный анализ точности МКЭ и МФ. Вычислительными экспериментами обоснован вывод о том, что по МФ точность расчетов повышается на порядок.

4. Предлагаемый метод использован для составления прогноза изменения напоров подземных вод в гидрогеологическом объекте Тору-Айгыр – Чоктал Ысык – Кульской области и проведён сравнительный анализ с ранее полученными результатами другими исследователями.

5. На основе предлагаемого метода создан комплекс программ для решения прогнозных задач фильтрации подземных вод с учетом естественных и искусственных факторов.

Личный вклад соискателя. Личный вклад соискателя состоит в разработке экономичных алгоритмов, пригодных для решения прямых задач теории установившейся и неуставившейся фильтрации подземных вод; в проведении вычислительных экспериментов с применением как линейных, так и нелинейных базисных функций; в применении разработанных алгоритмов к конкретному гидрогеологическому объекту; в обработке полученных результатов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований диссертационной работы обсуждались на различных научных семинарах, научных и научно-практических конференциях: на Международной научной конференции, посвященной 50-летию образования КГПУ им. Арабаева (Бишкек, 2002г.), на Республиканской конференции «Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования» (Бишкек, 2004г.), на Международном

научно-техническом симпозиуме «Образование через науку», посвященном 50-летию ФПИ-КТУ им. И. Раззакова (Бишкек, 2004г.), на Международной научно-практической конференции «Модернизация содержания технологий обучения и воспитания: мировой опыт и проблемы» (Каракол, 2007г.), на научном семинаре секции физико-математических и технических наук НТС ЫГУ, на VII- ежегодной летней школе ученых-механиков Кыргызстана (Каракол, 2008 г.), семинарах кафедр прикладной математики КГУСТА и ЫГУ им. К. Тыныстанова и на объединенном семинаре лабораторий Института автоматики НАН КР (Бишкек, 2003- 2007гг.).

Опубликованность результатов. Содержание диссертационной работы изложены в 14 научных статьях, опубликованных в рецензируемых научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения, изложенных на 102 страницах машинописного текста, содержит 15 таблиц, 24 рисунка и список использованной литературы из 81 наименований.

Краткое содержание работы

В введении изложены актуальность темы диссертации, методы исследования и научная новизна, обоснованность и достоверность результатов исследований, практическая и теоретическая ценность работы и основные положения, выносимые на защиту.

В **первой** главе рассматривается применение метода фрагментов в плоских задачах теории фильтрации.

Сначала приводится алгоритм решения плоской стационарной задачи напорной фильтрации

$$LH \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

$$IH \equiv T \frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (1.2)$$

методом конечных элементов. Здесь $H = H(x, y)$ – напор; $T = T(x, y) = m(x, y)k(x, y)$ – водопроницаемость, $m(x, y)$ – мощность, $k(x, y)$ – коэффициент фильтрации пласта; $f(x, y)$ – функция источников и стоков; $Q = Q(x, y) \geq 0$ – функция, учитывающая водообмен с выше - и нижележащими пластами; $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ – заданные функции; D – область фильтрации, ∂D – ее граница.

Затем эта же задача решена методом фрагментов. Область течения подземных вод D разбиваем на m фрагментов треугольной формы, так что область D заменяется на многоугольник, состоящий из m треугольников. На рис.1.1 показан типичный фрагмент S с вершинами i, j и k , которые имеют координаты (x_i, y_i) , (x_j, y_j) и (x_k, y_k) .

Введем произвольные линейно - независимые функции $N_1(x, y)$, $N_2(x, y)$ в области D и искомую функцию $H(x, y)$ внутри фрагмента S аппроксимируем функцией

$$H^s(x, y) = a_0^s + a_1^s N_1(x, y) + a_2^s N_2(x, y), \quad (1.3)$$

где a_0^s, a_1^s и a_2^s - неизвестные коэффициенты, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a_0^s + a_1^s N_1(x_i, y_i) + a_2^s N_2(x_i, y_i) = H(x_i, y_i), \\ a_0^s + a_1^s N_1(x_j, y_j) + a_2^s N_2(x_j, y_j) = H(x_j, y_j), \\ a_0^s + a_1^s N_1(x_k, y_k) + a_2^s N_2(x_k, y_k) = H(x_k, y_k). \end{cases} \quad (1.4)$$

Из системы (1.4) находим a_0^s, a_1^s, a_2^s и подставляя их выражения в равенство (1.3), имеем

$$H^s(x, y) = H(x_i, y_i)N_i^s(x, y) + H(x_j, y_j)N_j^s(x, y) + H(x_k, y_k)N_k^s(x, y), \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} N_i^s(x, y) &= [(N_{1j}N_{2k} - N_{1k}N_{2j}) + (N_{2j} - N_{2k})N_1(x, y) + (N_{1k} - N_{1j})N_2(x, y)] / \Delta^s, \\ N_j^s(x, y) &= [(N_{1k}N_{2i} - N_{1i}N_{2k}) + (N_{2k} - N_{2i})N_1(x, y) + (N_{1i} - N_{1k})N_2(x, y)] / \Delta^s, \\ N_k^s(x, y) &= [(N_{1i}N_{2j} - N_{1j}N_{2i}) + (N_{2i} - N_{2j})N_1(x, y) + (N_{1j} - N_{1i})N_2(x, y)] / \Delta^s, \\ \Delta^s &= N_{1i}(N_{2j} - N_{2k}) + N_{1j}(N_{2k} - N_{2i}) + N_{1k}(N_{2i} - N_{2j}). \end{aligned}$$

Допустим, что при разбиении области D на m фрагментов число узлов, где необходимо определить значения искомой функции $H(x, y)$, равно n . Тогда приближенное решение краевой задачи можно представить в виде

$$H(x, y) \approx \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^3 H_i N_i^s(x, y) = \sum_{r=1}^n H_r N_r(x, y) \quad (1.6)$$

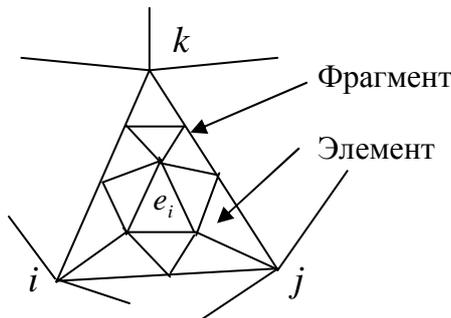


Рис.1.1 Разбиение области на фрагменты

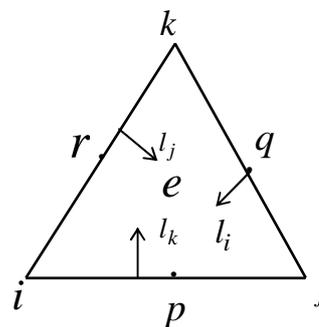


Рис.1.2. Элемент для алгоритма 1

Подставляя вместо функции $H(x, y)$ ее разложение (1.6) и применяя к задаче (1.1), (1.2) принцип Галеркина, приходим к СЛАУ относительно H_i :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} H_i = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \iint_D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_j N_i Q d\sigma + \int_{\partial D} N_j N_i \beta ds, \\ b_j &= \iint_D f N_j d\sigma + \int_{\partial D} \alpha N_j ds. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Практика показывает, что при удачном подборе таких базисных функций можно существенно повысить точность приближенного решения. В частном случае мы рассмотрим применение МФ с квадратичными базисами для приближенного решения задачи (1.1), (1.2).

Алгоритм 1 описан в литературе по МКЭ (рис.1.2).

Алгоритм 2. Суть этого алгоритма состоит в том, что вместо уравнения (1.1) рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$-T_0 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = f_0 \quad (1.9)$$

и его частные решения

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2 \quad (1.10)$$

используем в качестве базисных функций для решения задачи (1.1), (1.2),

где $\alpha = -f_0 / (2T_0)$. Образует функции формы по формулам

$$N_s(x, y) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y), \quad s = i, j, k. \quad (1.11)$$

В данном случае в подинтегральных выражениях в формулах (1.8) появляются многочлены второй и четвертой степеней, поэтому к вычислению интегралов привлечение известных квадратурных формул невозможно. В методе фрагментов в каждом фрагменте коэффициенты уравнений (1.1) и (1.2) постоянны, интегралы в формулах вычисляются точно, поэтому алгоритм 2 дает более точные результаты по сравнению с другими алгоритмами, где для вычисления интегралов применяются квадратурные формулы.

Алгоритм 3. В качестве базисов используются кубические сплайн – функции. Относительно узла i сплайн имеет вид (рис. 1.3)

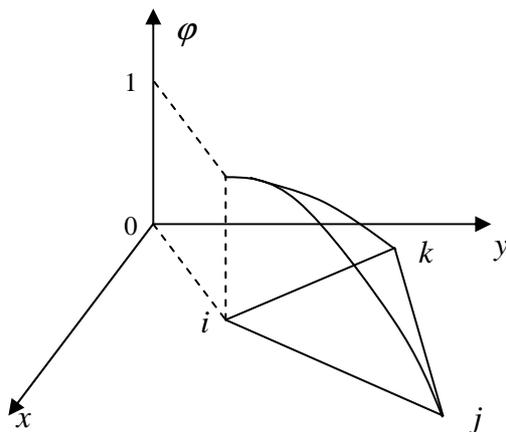


Рис.1.3

Двумерный В – сплайн относительно узла i .

$$\varphi_i(x) = 1 + a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i)^3,$$

где

$$a_i = - \left(\frac{1}{x_{ji}^2} + \frac{1}{x_{ki}^2} + \frac{1}{x_{ji}x_{ki}} \right), \quad b_i = \frac{x_{ji} + x_{ki}}{x_{ji}^2 x_{ki}^2},$$

$$x_{ji} = x_j - x_i, \quad x_{ki} = x_k - x_i.$$

Функция $\varphi_i(x)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(x_i) = 1, \quad \varphi_i(x_j) = 0, \quad \varphi_i(x_k) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x} = 0,$$

Аналогично строятся одномерные сплайны $\varphi_j(x)$, $\varphi_k(x)$ и $\varphi_s(x)$, $s = i, j, k$.

Базисные сплайны строятся в виде

$$\varphi_s(x, y) = \varphi_s(x)\varphi_s(y), \quad s = i, j, k.$$

Подставляя в формулах (1.6) вместо $N_s(x, y)$

сплайны $\varphi_s(x, y)$, $s = i, j, k$, получаем СЛАУ (1.7).

Работа алгоритмов отлажена на решении ряда тестовых примеров. В табл.1.1 приведены точные и приближенные значения искомой функции в узлах одного элемента (рис.1.2).

Таблица 1.1

Результаты применения линейных и квадратичных базисов

Узлы сетки	i	p	j	q	k	R
Точное решение	1.000	1.062	1.250	1.187	1.250	1.062

Приближ. решения	Лин. базисы	0.833	0.901	1.083	1.104	1.083	0.901
	Отн.погр.	17%	15%	13%	7%	13%	15%
	Алгоритм 1.	0.872	0.936	1.128	1.060	1.128	0.936
	Отн.погр.	13%	12%	10%	11%	10%	12%
	Алгоритм 2.	0.933	0.994	1.183	1.119	1.183	0.994
	Отн.погр.	7%	6%	5%	6%	5%	6%
	Алгоритм 3.	0.964	1.033	1.231	1.138	1.241	1.037
	Отн.погр.	4%	3%	3%	3%	2%	3%

В реальных условиях область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, в пределах каждого из которых значения гидрогеологических параметров можно считать постоянными. Именно в таких условиях алгоритмы 2 и 3 имеют явное преимущество перед линейными базисами, так как погрешность осреднения значений указанных функций T , Q , f , α и β по элементу равна нулю. Алгоритмы 2 и 3 требуют для своей работы минимальное количество информации, т.е. столько, сколько для линейных базисов и в сочетании с методом фрагментов являются наиболее предпочтительными перед другими алгоритмами.

Далее метод фрагментов применяется к решению нестационарного уравнения движения подземных вод.

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (1.12)$$

с начально-краевыми условиями

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1.13)$$

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H, \quad (x, y) \in S, \quad t > 0, \quad (1.14)$$

где $\mu = \mu(x, y)$ – коэффициент упругой водоотдачи; $H_0(x, y)$ – начальное распределение напоров.

Задачу (1.12)–(1.14) решаем методом фрагментов.

Алгоритм 1. В качестве базисных возьмем функции

$$H_1(x, y, t) = e^{-2t} \cos v_1(x+y), \quad H_2(x, y, t) = e^{-4t} \cos v_2(x+y), \quad (1.15)$$

являющиеся частными решениями однородного уравнения

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right), \quad (1.16)$$

где $v_i = \sqrt{i\mu/T}$, $i = 1, 2$, μ и T – постоянные величины.

Приближенное решение задачи (1.12)–(1.14) ищем в виде

$$H_n(x, y, t) = \sum_{e=1}^m \sum H^{(e)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n H_i(t) N_i(x, y). \quad (1.17)$$

Предварительно временной отрезок (t_0, t_1) разобьем на q элементарных отрезков $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, q$.

Подставляя в задаче (1.12)–(1.14) вместо $H(x, y, t)$ функцию $H_n(x, y, t)$ из формулы (1.17), проведя интегрирование на отрезке (t_s, t_{s-1}) и используя обобщенный принцип Галеркина, получаем СЛАУ

$$\sum_{i=1}^n R_{ij}^{(\gamma)} H_i^{(s)} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.18)$$

где

$$R_{ij}^{(\gamma)} = M_{ij} + \gamma(A_{ij} - B_{ij})\Delta t_s, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

$$F_j = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_D N_j f(x, y, t) d\sigma dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{\Gamma} N_j \alpha(x, y, t) ds dt + \sum_{i=1}^n R_{ij}^{(1-\gamma)} H_i^{(s-1)},$$

$$A_{ij} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D Q N_i(x, y) N_j(x, y) d\sigma,$$

$$M_{ij} = \iint_D \mu(x, y) N_i(x, y) N_j(x, y) d\sigma, \quad B_{ij} = \int_{\Gamma} \beta N_j N_i ds.$$

Алгоритм 2. Применяя к уравнению (1.12) двухслойную неявную разностную схему с весом $\sigma = 0.5$, на временном отрезке $[t_{s-1}, t_s]$ получаем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H^{(s)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H^{(s)}}{\partial y} \right) + q H^{(s)} = F^{(s)}, \quad s = 1, 2, K, \quad (1.19)$$

где $H^{(s)} = H(x, y, t_s)$, $q = Q + \frac{2\mu}{\Delta t}$, $F^{(s)} = f^{(s)} + f^{(s-1)} + \frac{2\mu}{\Delta t} H^{(s-1)} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H^{(s-1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H^{(s-1)}}{\partial y} \right) + Q H^{(s-1)}$.

Такая схема, как известно, имеет точность $O(\Delta t^2)$.

Таким образом, на каждом временном шаге мы решаем задачу (1.19), (1.13), (1.14). Преимуществом такого подхода является использование квадратичных и кубических базисных функций, рассмотренных в стационарной задаче.

С целью выяснения практической ценности нелинейных базисов проведены расчеты на «мелкой» и более «крупной» сетках. В таблице 1.2 сравниваются результаты задачи при линейном базисе с результатами той же задачи при нелинейных базисах, решенной на вдвое укрупненной сетке.

Таблица 1.2

Сравнение линейного и нелинейного базисов

№ узла	Точное решение	Лин. базис	Нелин. базис	№ узла	Точное решение	Лин. базис	Нелин. Базис
1	2.000	1.965	1.961	29	1.320	1.313	1.298
5	2.001	1.985	1.982	31	1.800	1.794	1.786
9	1.640	1.622	1.619	38	1.040	1.036	1.033
11	1.800	1.794	1.786	40	1.200	1.093	1.087
17	1.360	1.348	1.342	42	1.680	1.667	1.662

Продолжение таблицы 1.2

19	1.520	1.514	1.496	49	1.000	1.006	1.021
20	1.720	1.716	1.708	51	1.160	1.152	1.148
21	2.000	1.999	1.987	53	1.640	1.622	1.619

27	1.160	1.152	1.147	54	2.000	1.965	1.961
----	-------	-------	-------	----	-------	-------	-------

Применение нелинейных базисов позволяет намного упростить моделирование реальных объектов путем замены мелких элементов более крупными фрагментами. Вычислительными экспериментами установлено, что в случае установившейся фильтрации эффективными базисами в смысле точности и экономичности в методе фрагментов являются частные решения стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами (т.е. квадратичные функции относительно переменных x и y), а также кусочно – кубические сплайн – функции, которые увеличивают точность по сравнению с линейными базисами 2-3 раза. В случае неустановившейся фильтрации рекомендуется также применять кусочно-кубические базисы, которые позволяют увеличить шаг сетки в два раза по сравнению с линейными базисами при сохранении той же точности.

Во **второй** главе метод фрагментов применяется в пространственных задачах.

Разрабатывается алгоритм решения МКЭ задачи пространственной стационарной фильтрации

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H}{\partial z}\right)=f(x,y,z), \quad (x,y,z)\in V, \quad (2.1)$$

$$k\frac{\partial H}{\partial n}-\beta H=\alpha(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\Sigma \quad (2.2)$$

методом конечных элементов, затем она решается МФ с применением квадратичных и кубических базисов. Предположим, что область фильтрации V – цилиндр с вертикальными образующими. Разбиваем область V на m треугольных призм и рассмотрим фрагмент (f), образованный из призмы с вершинами i, j, k , $i'=i+\Delta i$, $j'=j+\Delta j$, $k'=k+\Delta k$ (рис 2.1).

В фрагменте (f) функция $H^{(f)}(x,y,z)$ образуется в виде

$$H^{(f)}(x,y,z)=H_i^{(f)}F_i(x,y,z)+H_j^{(f)}F_j(x,y,z)+H_k^{(f)}F_k(x,y,z)+ \\ +H_{i'}^{(f)}F_{i'}(x,y,z)+H_{j'}^{(f)}F_{j'}(x,y,z)+H_{k'}^{(f)}F_{k'}(x,y,z). \quad (2.3)$$

Здесь базисные функции $F_i, F_j, F_k, F_{i'}, F_{j'}, F_{k'}$ должны быть линейно-независимыми нелинейным функциями. Рассмотрим два алгоритма, использующие нелинейные базисные функции.

Алгоритм 1. Базисные функции образуем с помощью частных решений следующего стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами

$$-k_0\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)=W_0, \quad (2.4)$$

которые имеют вид

$$H_1(x)=\alpha x^2+p_1x+q_1, \quad H_2(y)=\alpha y^2+p_2y+q_2, \quad H_3(z)=\alpha z^2+p_3z+q_3,$$

где $\alpha=-W_0/(2k_0)$, $p_i, q_i (i=1,2,3)$ - произвольные параметры.

Учитывая призматическую форму фрагментов, базисные функции

$F_s(x,y,z) (s=i, j, k, i', j', k')$ образуем в виде

$$F_s(x, y, z) = N_s(x, y)\hat{O}_s(z), \quad s = i, j, k, i', j', k', \quad (2.5)$$

где

$$N_s(x, y) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y), \quad \hat{O}_s(z) = U_s + V_s \varphi(z),$$

$$u_s = \frac{\varphi(z_s + \Delta z)}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad v_s = -\frac{1}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad u_{s'} = -\frac{\varphi(z_s)}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad v_{s'} = \frac{1}{\Delta \varphi(z_s)},$$

$\Delta \varphi(z_s) = \varphi(z_s + \Delta z) - \varphi(z_s)$, $s = i, j, k$; $\varphi(z)$ – произвольная нелинейная элементарная функция, определенная на отрезке $[z, z + \Delta z]$. В частности, в качестве $\varphi(z)$ можно взять функцию $H_3(z)$.

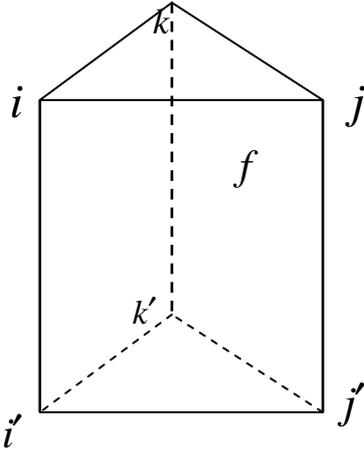


Рис.2.1. Призматический элемент

Если область V аппроксимируется m треугольными призмами, то приближенное решение краевой задачи (2.1)–(2.2) ищется в виде

$$H_n(x, y, z) = \sum_{f=(f)}^m \sum H^{(f)}(x, y, z) = \sum_{s=1}^n H_s F_s(x, y, z), \quad (2.6)$$

где n – число всех узлов сеточной области.

Подставляя вместо $H(x, y, z)$ функцию $H_n(x, y, z)$ из формулы (2.6) и применяя к задаче (2.1), (2.2) обобщенный принцип Галеркина получаем, СЛАУ:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

где

$$a_{ij} = \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv + \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z) d\sigma,$$

$$f_i = \iiint_V F_i(x, y, z) W(x, y, z) dv + \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z) d\sigma. \quad (2.8)$$

Алгоритм 2. Вместо квадратических многочленов $N_s(x, y)$ в формулах (2.5) подставим кубические сплайны $\varphi_s(x, y) = \varphi_s(x)\varphi_s(y)$, $s = i, j, k$, использованные в плоской задаче. Эти функции в узле s равны единице, а в двух других узлах элемента равны нулю, их производные в этом узле также равны нулю.

В случае призматических фрагментов преимуществом базисов (2.5) является разделенность переменных, а именно то, что интегралы в формулах (2.8) берутся сначала по треугольному основанию призмы, где можно использовать результаты применения нелинейных базисов в двумерной задаче, а затем легко вычисляются по z в постоянных пределах.

Изучая алгоритмы решения задачи (2.1), (2.2) с применением тетраэдральных и призматических элементов, можно сравнить их с вычислительной точки зрения. Если считать коэффициенты уравнений (2.1) и (2.2) постоянными, то в случае тетраэдральных элементов под объемными и поверхностными интегралами соответственно будут многочлены первой и второй степеней, а в случае призматических элементов – многочлены второй и четвертой степеней. Ясно, что во втором случае вычисление интегралов затрудняется существенно, в то же время точность аппроксимации искомой функции выше. Для каждого узла

сетки в первом случае объемные интегралы берутся 13 раз по тетраэдру, поверхностные – 18 раз по треугольникам, а во втором случае объемные - 7 раз по призме и поверхностные – 14 раз по треугольникам и прямоугольникам. Как и в двумерной задаче, преимущество МФ должно наблюдаться при значительном укрупнении фрагментов.

Далее разрабатывается алгоритм приближенного решения задачи нестационарной фильтрации подземных вод в пространственной области

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = f, \quad (x, y, z) \in V, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

$$H(x, y, z, 0) = H_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \quad (2.10)$$

$$k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t > 0 \quad (2.11)$$

МКЭ с применением тетраэдральных элементов. Затем задача решается с помощью призматических фрагментов (см. рис. 2.1). Как и в двумерном случае, задачу решаем с применением тригонометрических и кусочно-кубических базисов.

Алгоритм 1. Цилиндрическую область фильтрации разобьем горизонтальными плоскостями на слои и в слое $[z_q, z_{q+1}]$ выделяем призматический элемент (f) с вершинами i, j, k, i', j', k' . В качестве базисных функций используем частные решения следующего однородного нестационарного уравнения

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right), \quad (2.12)$$

которые имеют вид

$$H_i(x, y, z, t) = e^{-it} \cos v_i(x + y) \varphi_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

где

$$\varphi_i(z) = e^{-v_i z}, \quad v_i = \sqrt{i\mu/k}.$$

Функцию $H^{(f)}(x, y, z, t)$ в фрагменте (f) представим в виде

$$H^{(f)}(x, y, z, t) = \sum_{s=1}^6 F_s(x, y, z) H_s(t),$$

здесь

$$F_s(x, y, z) = e^{-st} \cos v_s(x + y) \Phi(z), \quad s = i, j, k, i', j', k'.$$

$$\Phi_q(z) = \frac{\varphi(z_{q+1}) - \varphi(z)}{\Delta\varphi(z_q)}, \quad \Phi_{q+1}(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(z_q)}{\Delta\varphi(z_q)}, \quad \Delta\varphi(z_q) = \varphi(z_{q+1}) - \varphi(z_q).$$

Приближенное решение начально-краевой задачи (2.9)-(2.11) ищется в виде разложения

$$H_n^{(f)}(x, y, z, t) = \sum_{f=1}^m \sum H^{(f)}(x, y, z, t) = \sum_{s=1}^n F_s(x, y, z) H_s(t), \quad (2.14)$$

где m - число призматических элементов, n - число всех узлов сеточной области. Образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots$. Подставляя в задаче (2.9) - (2.11) вместо $H(x, y, z, t)$ функцию $H_n(x, y, z, t)$ из формулы (2.14) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем СЛАУ относительно неизвестных $H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j^{(s)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.15)$$

где

$$a_{ij} = M_{ij} + (N_{ij}^{(s)} - \sigma B_{ij}^{(s)}) \Delta t_s,$$

$$M_{ij} = \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv, \quad N_{ij} = \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv,$$

$$B_{ij} = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t) d\sigma, \quad b_i = [\sigma f_i^{(s)} + (1 - \sigma) f_i^{(s-1)}] \Delta t_s +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \{ [M_{ij} - (1 - \sigma) B_{ij}^{(s-1)}] H_j^{(s-1)} \} + [\sigma A_i^{(s)} + (1 - \sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s$$

$$A_i = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t) d\sigma, \quad f_i = \iiint_V F_i(x, y, z) f(x, y, z, t) dv.$$

Алгоритм 2. Как и в плоской задаче, применяя к уравнению (2.9) двухслойную неявную разностную схему с весом $\sigma = 0.5$, на каждом временном слое $[t_{s-1}, t_s]$ решаем стационарную задачу типа (2.1)-(2.2), что дает возможность использования кусочно-кубических базисных функций.

В таблицах 2.1 и 2.2 даны точные и приближенные решения тестовой задачи, полученные с применением тетраэдральных и призматических элементов. Приведены результаты в узлах, лежащих в первом октанте, причем узлы 1, 38 и 75 расположены на оси цилиндра, узлы 5, 42 и 79 – на границе, а остальные узлы являются внутренними.

Таблица 2.1

Решение стационарной задачи

Узлы	1	4	5	38	41	42	75	78	79
Точное решение	1.000	1.163	1.252	1.040	1.202	1.292	1.160	1.322	1.412
Тетраэдры	1.013	1.175	1.244	1.047	1.216	1.300	1.169	1.322	1.381
Призмы. Квадратич. базисы	1.006	1.154	1.254	1.045	1.209	1.304	1.168	1.320	1.380
Сплайновые базисы	1.002	1.160	1.250	1.042	1.206	1.299	1.164	1.321	1.397

Таблица 2.2

Решение нестационарной задачи

Узлы	1	4	5	38	41	42	75	78	79
Время $t=0.1$									
Точн. реш.	1.105	1.285	1.383	1.149	1.329	1.428	1.282	1.462	1.560
Тетраэдры	1.109	1.298	1.376	1.157	1.342	1.435	1.292	1.459	1.524

Призмы	1.112	1.274	1.384	1.146	1.327	1.439	1.290	1.458	1.523
Сплайновые базисы	1.110	1.273	1.385	1.146	1.327	1.438	1.289	1.459	1.524
Время $t=0.5$									
Точн. реш.	1.649	1.917	2.064	1.715	1.983	2.130	1.913	2.180	2.328
Тетраэдры	1.668	1.937	2.054	1.727	2.003	2.142	1.927	2.180	2.275
Призмы	1.658	1.903	2.065	1.710	1.979	2.146	1.925	2.174	2.273
Сплайновые базисы	1.657	1.904	2.066	1.711	1.980	2.140	1.924	2.179	2.280
Время $t=1.0$									
Продолжение таблицы 2.2									
Точн. реш.	2.718	3.160	3.403	2.827	3.269	3.511	3.153	3.595	3.837
Тетраэдры	2.747	3.195	3.392	2.848	3.306	3.536	3.176	3.603	3.758
Призмы	2.734	3.141	3.406	2.818	3.263	3.537	3.172	3.584	3.751
Сплайновые базисы	2.730	3.145	3.405	2.820	3.264	3.534	3.169	3.589	3.759

Сравнение результатов дает основание сделать заключение о равноценности итогов применения тетраэдральных и призматических элементов, а последние имеют явное преимущество перед классическими элементами в смысле трудоемкости и удобства при проведении вычислений.

В **третьей** главе приводятся результаты вычислительных экспериментов и применения МФ к конкретному гидрогеологическому объекту. В объекте работает сеть откачивающих скважин, поэтому было необходимо сперва моделировать работу скважины. Моделирование работы одиночной скважины преследует цель вычислить понижение напоров или уровней грунтовых вод в прискважинной зоне. Успешное решение задачи для одиночной скважины позволит проводить расчеты также для интерференции скважин.

Рассмотрен вопрос об аппроксимации работы откачивающей скважины с помощью дельта – функции Дирака. Если скважина с постоянным дебитом q_i находится в точке $M_i(x_i, y_i)$, то функция источника (стока) будет равной

$$f(x, y) = q_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (3.1)$$

где $\delta(x - x_i, y - y_i)$ – дельта - функция Дирака.

Представляя функцию $\delta(x - x_i, y - y_i)$ в виде

$$\delta(x - x_i, y - y_i) = \left[1 - \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{r^2} \right] C_r,$$

получаем для функции источника выражение

$$f(x, y) = \frac{2q_i}{\pi r^2} \left[1 - \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{r^2} \right], \quad f(x_i, y_i) = \frac{2q_i}{\pi r^2}. \quad (3.2)$$

где $r^2 = (x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2$, (x_r, y_r) - точки, лежащие на окружности S_r радиуса r с центром в точке (x_i, y_i) .

На рис.3.1 показаны кривые депрессии в прискважинной зоне, полученные по известной формуле и по предлагаемому методу.

Затем составлен прогноз режима подземных вод в гидрогеологическом объекте Торун-Айгыр – Чоктал Ысык – Кульской области.

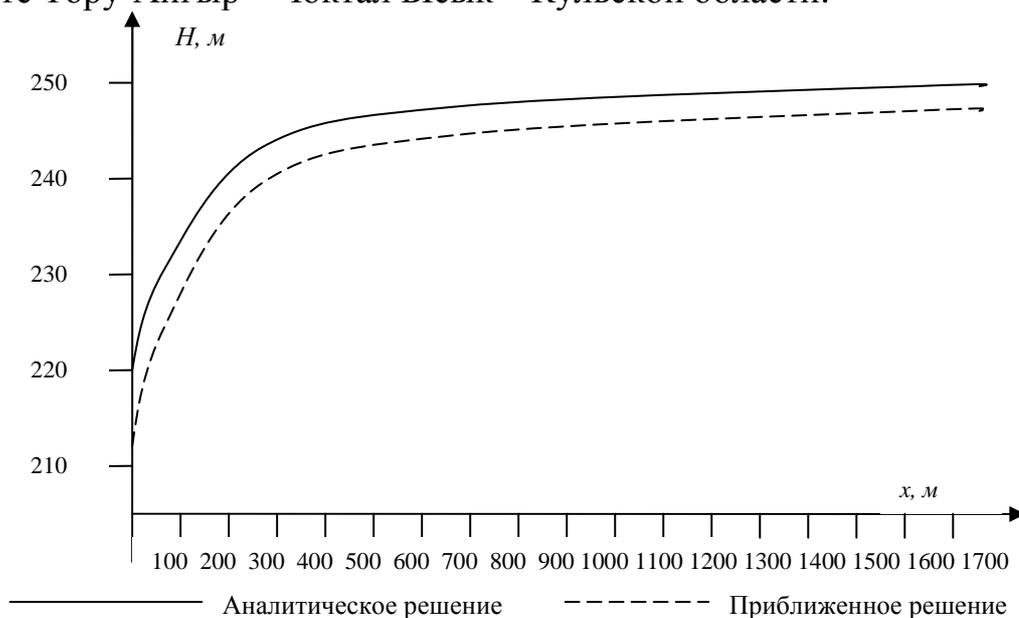


Рис.3.1 Кривые депрессии в прискважинной зоне.

Использование нелинейных базисов (в частности, нелинейных и тригонометрических) и фрагментности исследуемой области фильтрации позволило существенно сократить объем работ по моделированию гидрогеодинамических процессов. В задачах, рассмотренных в этом параграфе, использованы методика моделирования с применением фрагментности области, а также метод аппроксимации условия на скважинах при однослойном строении водоносных пластов. В гидродинамической постановке условия на скважинах аппроксимированы δ -функцией Дирака.

Предлагаемая методика опробована на решении задачи по прогнозированию режима подземных вод на участке Торун-Айгыр – Чоктал Ысык – Кульской области. Описание гидрогеологических условий участка заимствовано из «Схемы водохозяйственного устройства реконструкции орошаемых земель центральной и западной части Иссык – Кульского района Иссык – Кульской области. – Бишкек, 1994», выполненной Институтом «Кыргызгипроводхоз».

С целью математического моделирования месторождения подземных вод (МПВ) необходимо провести схематизацию гидрогеологического объекта. При этом, кроме прочих обстоятельств, следует предварительно выяснить слоистость и другие характеристики водоносного пласта. Гидрогеологическое изучение МПВ участка Торун-Айгыр – Чоктал (рис.3.2) показало однослойность пласта по вертикали и неоднородность по горизонтальному направлению грунта. Поэтому процесс моделируется уравнениями (1.12)-(1.14).

Участок Торун-Айгыр – Чоктал расположен на северном побережье озера Ысык-Куль. Западная и восточная границы участка проходят по межконусным

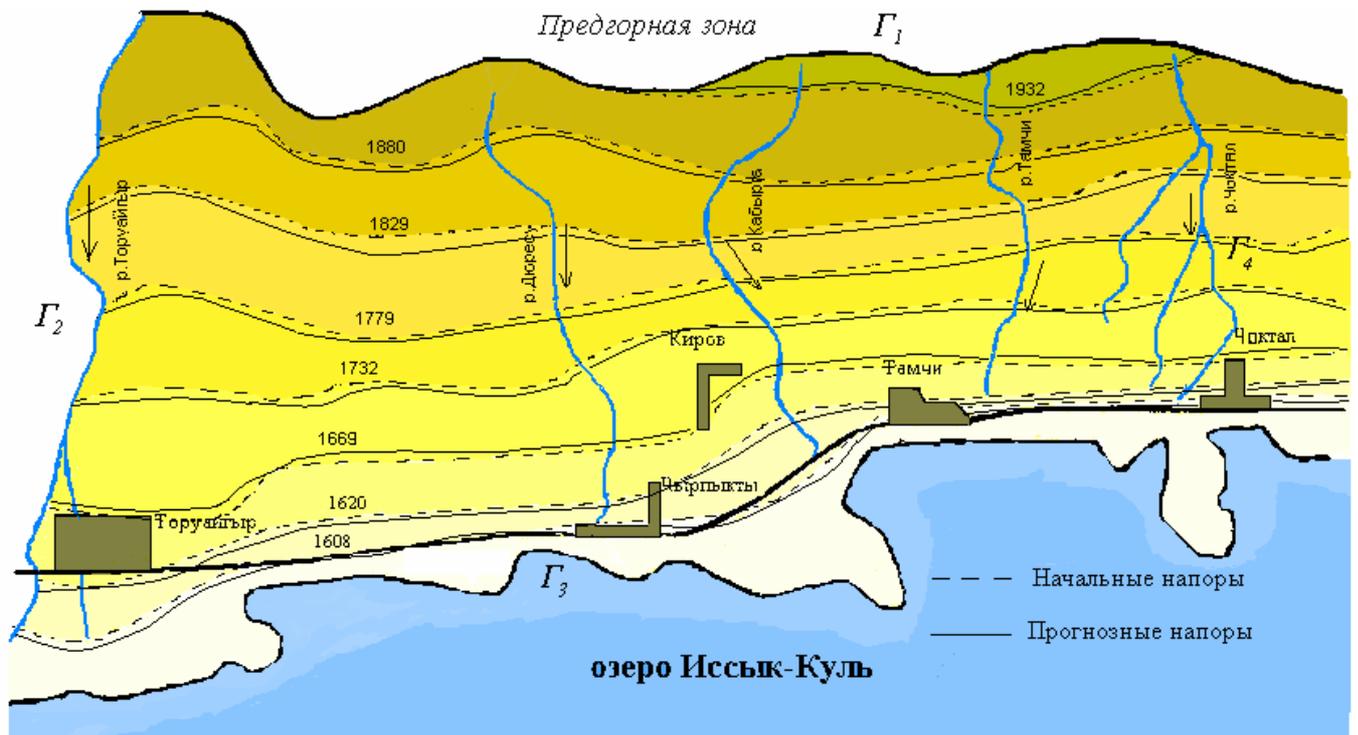


Рис.3.2 Прогнозные напоры в системе междуречья Торуйайгыр – Чоктал

Таблица 3.1

Результаты расчетов по МКЭ и МФ
МКЭ

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
УГВ	1817,99	1784,29	1746,35	1723,17	1726,27	1604,78	1608,05	1608,89	1877,72	1825,17	1728,17	1728,65	1605,25	1604,87	1609,03
№ узла	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
УГВ	1608,97	1608,87	1876,87	1878,37	1828,08	1731,22	1731,81	1604,89	1611,73	1608,59	1608,90	1608,87	1608,86	1816,67	1750,65
№ узла	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
УГВ	1610,72	1607,61	1608,51	1608,87	1607,95	1608,95	1609,03	1894,92	1879,79	1880,51	1829,92	1779,75	1732,98	1617,82	1618,79
№ узла	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
УГВ	1610,83	1611,80	1609,67	1608,81	1882,77	1877,06	1879,38	1778,75	1685,69	1618,55	1620,09	1608,80	1623,73	1622,32	1610,77
№ узла	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
УГВ	1611,18	1608,88	1916,19	1845,05	1690,68	1625,83	1614,60	1613,66	1608,87	1627,51	1618,37	1618,29	1608,88	1608,86	1874,69
№ узла	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
УГВ	1852,05	1839,39	1738,53	1640,82	1628,65	1605,75	1608,86	1668,15	1672,37	1675,56	1645,07	1608,79	1608,80	2166,87	2151,89
№ узла	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
УГВ	1882,79	1895,19	1598,65	1615,23	1609,02	1608,96	2278,56	1951,90	1770,58	1728,59	1622,77	1608,56	1608,85	1932,20	1810,95
№ узла	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115					
УГВ	1771,98	1737,40	1669,22	1620,61	1623,13	1874,41	1812,99	1739,25	1671,33	1608,77					

МФ

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
УГВ	1818,12	1746,20	1723,58	1608,48	1608,61	1878,05	1730,98	1728,92	1604,55	1608,32	1608,28	1608,50	1877,12	1878,05	1816,33
№ узла	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
УГВ	1750,21	1608,52	1894,42	1878,87	1618,03	1618,23	1608,01	1882,27	1690,17	1608,28	1610,21	1608,53	1608,53	1874,31	1852,43
№ узла	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
УГВ	1738,12	1606,22	1608,23	1895,53	1608,14	2278,15	1728,03	1622,16	1608,25	1932,01	1874,03	1771,55	1739,02	1608,25	

понижениям со смежными конусами выноса рек Тору-Айгыр и Чоктал. Северная граница - горный склон Кунгей Ала-Тоо, южная граница – озеро Ысык-Куль (рис.3.2).

Предварительно область фильтрации разбивалась на 233 элемента, количество узлов для функции напора равно 138. Применением метода фрагментов удалось сократить число элементов до 88, а количество узлов соответственно до 56 для данного участка.

Практика показывает, что когда число уравнений аппроксимирующей алгебраической системы больше ста, даже метод Гаусса становится неустойчивым. Поэтому для решения таких систем использованы специальные методы (SVD – метод, применение регуляризации).

В табл.3.1 приведены вычисленные значения напоров во всех узловых точках. На рис.3.2 даны начальные (наблюденные) и вычисленные изолинии напоров. Вычисленные напоры отличаются от наблюдаемых не более чем на 25 %.

Далее проведены вычислительные эксперименты с целью изучения влияния линейных и нелинейных базисных функций в методе конечных элементов на точность решения стационарных задач фильтрации. Результаты экспериментов показывают, что при линейных базисах МКЭ аппроксимирует решение задач со вторым порядком точности, а при квадратических и кубических базисах – с третьим порядком. Это подтверждает предположение о том, что линейные базисы являются аналогом формулы трапеций, а квадратичные базисы – формулы Симпсона.

Заключение

1. При математическом моделировании движения подземных вод решаются краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений в области со сложной геометрией. Наиболее эффективным для решения таких задач является метод конечных элементов, который опирается на классические методы Рунге и Галеркина и с высокой точностью аппроксимирует граничные условия на криволинейных границах области фильтрации.

2. При исследовании больших месторождений подземных вод необходимо разбивать область течения подземных вод на крупные фрагменты, в каждом из которых гидрогеологические параметры практически можно считать постоянными. Для компенсации возросшей погрешности из-за увеличения шага расчетной сетки следует применять в методе конечных элементов нелинейные базисные функции.

3. Вычислительными экспериментами установлено, что в случае установившейся фильтрации эффективными базисами в смысле точности и экономичности в методе фрагментов являются частные решения стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами, а также кусочно – кубические сплайн – функции, которые увеличивают точность по сравнению с линейными базисами 2 – 3 раза, а в случае неустановившейся фильтрации рекомендуется применять тригонометрические базисы, которые позволяют увеличить шаг сетки в два раза по сравнению с линейными базисами при сохранении той же точности.

4. Методом конечных элементов численно решена пространственная задача фильтрации подземных вод в гидродинамической постановке, базисными функциями при этом являются линейные функции, а элементами – простейшие из полиэдров – тетраэдры. В методе фрагментов применяются призматические элементы, а в качестве базисов, как и в случае плоской задачи – частные решения стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами и кусочно – кубические сплайны. В данном случае функции формы конструированы таким образом, чтобы интегралы по фрагментам берутся сначала по треугольному основанию призмы, а затем – по вертикальной координате в постоянных пределах, благодаря чему полностью используется алгоритм для плоской задачи с незначительным продолжением в виде интеграла от известной квадратичной функции по высоте призмы.

5. Непосредственным подсчетом числа операций и вычислительными экспериментами установлено, что в методе фрагментов объем вычислений сокращается в 2,5 – 3 раза, а точность решения имеет тот же порядок, что и в методе конечных элементов.

6. Алгоритм решения плановых задач фильтрации, основанный на фрагментности области течения и на нелинейных базисах, использован для составления прогноза изменения уровней напорных подземных вод в гидрогеологическом объекте Торун-Айгыр – Чоктал Ысык – Кульской области

Кыргызской Республики. Применение метода фрагментов позволило существенно сократить объем работ по моделированию движения подземных вод.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Исабеков К.А. Моделирование работы скважины дельта – функцией Дирака. // Вестник ИГУ, №19, 2008.–с. 26–29.
2. Исабеков К.А. Применение нелинейных базисов в нестационарной задаче фильтрации подземных вод. // Вестник ИГУ, № 21, 2008. –с. 42–46.
3. Исабеков К.А. Применение сплайн – функций для решения задач фильтрации подземных вод. // 1-я Международная научно-практическая конференция «Наука и бизнес: пути развития», Тамбов, 2009. –с. 65–70.
4. Исабеков К.А., Маданбекова Э.Э. Прогнозирование уровня грунтовых вод в многослойных пластах.//Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск №10/ Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии, Бишкек, 2009.
5. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Приближенное решение задач фильтрации подземных вод с использованием фрагментности области // Вестник ИГУ, №4, 2000.- С. 104-108.
6. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Численное решение задачи неустановившейся фильтрации грунтовых вод методом конечных элементов.//Приложение к журналу «Вестник ИГУ»,часть 2,Естественные и прикладные науки.-Каракол,2001.- С. 35-40.
7. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Имангазиева К. Краевая задача для пространственной квазистационарной фильтрации // Материалы научно– практ. конф., посвященной 5–летию образования НГУ: Нарын, 2001.
8. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Турдалиев К.М. Сглаживание с помощью сплайн-функций // Материалы научно– практ. конф., посвященной 60–летию образования Иссык – Кульской области: Каракол, 2001.
9. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Джаныбеков Б. Нестационарное пространственное течение подземных вод // Вестник ИГУ, №5, 2001.–С. 152–159.
10. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Приближенное решение задачи напорной фильтрации методом конечных элементов с квадратичными базисами // Материалы международной науч. конф. «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы », посвященной 50–летию образования КГПУ им. И. Арабаева, Бишкек, 2002. –С. 362–367.
11. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации подземных вод методом фрагментов // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 21 – 26.
12. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Применение метода конечных элементов с квадратичными базисами к решению задач напорной фильтрации подземных вод // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 26-33.
13. Мурзакматов М. У., Исабеков К. А. Приближенное решение краевой задачи пространственной стационарной фильтрации подземных вод // Вестник ИГУ, № 10, Каракол, 2004,- С. 209-213.

14. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи пространственной стационарной фильтрации подземных вод // Вестник Оренбургского государственного университета, №5 (43), Оренбург, 2005.– С.93-102.

Резюме

Исабеков Кубатбек Абдыкеримович

Жер алдындагы суулардын фильтрациясынын прогноздук маселелерин фрагменттер методу менен чыгаруу

01.02.05 – Суюктуктун, газдын жана плазманын механикасы адистиги боюнча физика – математика илимдеринин кандидаты деген илимий даражаны алуу үчүн жазылган диссертация.

Ачкыч сөздөр: Жер астындагы суулардын чыпкалануусу, жер астындагы суулардын кени, чектүү элементтер методу, фрагменттер методу, алгоритм, гидрогеологиялык объект, математикалык моделдүү, прогноз, калыптанбаган агым, четки маселе.

Диссертация жер астындагы суулардын ири кендерин изилдөөдө гидрогеологиялык объекттин касиеттери жөнүндө маалыматтар жетишсиз болгон учурларда жер астындагы суулардын чыпкалануусу теориясынын көп өлчөмдүү маселелерин чыгарууга керектелүүчү экономдуу алгоритмдерди иштеп чыгууга арналган. Чектүү элементтер методунун чыпкалануу областын ири фрагменттерге бөлүүчү жана сызыктуу эмес базистик функцияларды пайдалануучу модификациясы сунуш кылынган.

Диссертациянын негизги жоболору тесттик маселелерди чыгаруу менен жана алынган жыйынтыктарды адабияттардагы белгилүү болгон жана байкоолордон алынган маалыматтар менен салыштыруу аркылуу бекемделген.

Резюме

Исабеков Кубатбек Абдыкеримович

Решение прогнозных задач фильтрации подземных вод методом фрагментов

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

Ключевые слова: фильтрация подземных вод, месторождение подземных вод, метод конечных элементов, метод фрагментов, алгоритм, гидрогеологический объект, математическое моделирование, прогноз, неустановившейся течение, краевая задача.

Диссертация посвящена разработке экономичных алгоритмов, пригодных для решения многомерных задач теории фильтрации подземных вод в случае недостаточной информации о свойствах гидрогеологического объекта при исследовании крупных месторождений подземных вод. Предложена модификация метода конечных элементов, разбивающая область фильтрации на крупные фрагменты и использующая нелинейные базисные функции.

Основные положения диссертации подтверждены на решениях тестовых задач и путем сопоставления полученных результатов с известными в литературе результатами и данными наблюдений.

Abstract

Isabekov Kubatbek Abdikerimovich

Solving of the prognostic problems of a filtration of underground waters by the fragment method

The dissertation on competition of a scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences on a speciality 01.02.05 - Mechanics of a liquid, gas and plasma.

Key Word: filtration of underground water, deposit of underground water, method of finite elements, method of fragments, algorithm, hydro – geological works.

The dissertation is dedicated to the elaboration of economic algorithms useful for the solving of many problems of the theory of filtration of underground water in the situation of insufficient information of the quality of the hydro – geological works in the case of investigation of large – scale deposit of underground water. Proposal of modification of the method of finite elements, dividing up the field of filtration in large – scale fragments and using non – linear base function.

Main propositions of the dissertation is the confirmation of the textual problem and the way for comparison with known results in literature and observed observation.