

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ КЫРГЫЗСТАН  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ТОГОЧУЕВ АЗЫРБЕК БАПАРОВИЧ

РАЗДЕЛИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 1992

Работа выполнена в Иссык-Кульском Государственном педагогическом институте имени К.Тыныстанова

Научные руководители:

Член-корреспондент АН Республики Казахстан,  
профессор М.О.Отелбаев

кандидат физико-математических наук, доцент  
М.А.Муратбеков

Официальные аппоненты:

Член-корреспондент АН Республики Казахстан,  
профессор К.А.Касимов (Казахский госуниверситет)  
доктор физико-математических наук, с.н.с.К.А.Алымкулов  
(ИМ АН Республики Кыргызстан)

Ведущая организация:

Математический институт с ВЦ АН Республики Таджикистан

Защита диссертации состоится "30" Марта 1993г.  
в 14 часов на заседании специализированного совета  
К 009.11.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-  
математических наук в Институте математики АН Республики  
Кыргызстан.

С диссертацией можно ознакомиться в ЦНБ АН Республики  
Кыргызстан.

Автореферат разослан "      "        1993г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу:  
720071, Бишкек, Чуйский проспект, 265 "А", Институт  
математики, Специализированный совет К 009.11.01.

Ученый секретарь

Специализированного совета,

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник

С.Искандаров С.Искандаров

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена теоремам разделимости<sup>\*)</sup> линейных и нелинейных дифференциальных операторов нечетного порядка с операторными коэффициентами, а также двусторонним оценкам функции распределения  $K$  - поперечников по Колмогорову множеств, связанных с областью определения нелинейного дифференциального оператора.

Вопросы гладкости решений дифференциальных уравнений в течение многих лет вызывает большой интерес в связи с их значением для приложений (большое количество задач газовой динамики, гидродинамики, гидромеханики). В случае ограниченной области и скалярных гладких коэффициентов вопросы, рассматриваемые в работе, хорошо изучены и в достаточной мере изложены в известной литературе.

В случае неограниченной области задачей разделимости, по-видимому, впервые начали (с 1970г.) заниматься Эверитт и Гири [1,2]. Их исследования получили дальнейшее развитие в работах М.Отелбаева, К.Х.Бойматова, М.Б.Муратбекова и др.

\*) Оператор  $L u = -u'' + q(x)u$  называется разделимым в  $L_1(R)$ , если из того, что  $u \in \mathcal{D}(L)$ , следует, что  $u'' \in L_1(R)$ , где  $R = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{D}(\cdot)$  - область определения.

1. Everitt W. N., Gieritz M. Some properties of the domains of certain differential operators. Proc London Math. Soc., LX(3), 1971, 301-324.
2. Everitt W. N., Gieritz M. Some inequalities associated with certain differential operators. Math. Z., 126, 1972, 308-326.

В этом аспекте интересно изучение дифференциальных операторов с операторными коэффициентами нечетного порядка. Такие операторы не могут быть полуограниченными и еще мало изучены. Кроме того изучение дифференциальных операторов с операторными коэффициентами имеет то преимущество, что позволяет во многих случаях изучить с единой точки зрения как системы обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнения с частными производными.

Цель работы: а) изучить разделимость линейного дифференциального оператора нечетного порядка в различных весовых пространствах;

б) изучить разделимость линейного дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом;

в) изучить разделимость нелинейного дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом;

г) выяснить условия существования и гладкость решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка и изучить аппроксимативные свойства его решений.

Научная новизна. Получены: достаточные условия разделимости дифференциальных операторов нечетного порядка в  $L_{p,c}(R)$ ;  $1 \leq p < \infty$ ,  $R = (-\infty, \infty)$ ; достаточные условия разделимости линейного дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом; достаточные условия разделимости нелинейного дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом; условия, обеспечивающие существование, гладкость и двусторонние оценки функции распределения поперечников по Колмогорову решений нелинейного уравнения второго порядка.

Методы работы. Основной метод - метод локализации (развит в работах М.Отелбаева [3]).

3. Отелбаев М. О гладкости решений дифференциальных уравнений. -

Известия АН КазССР, сер. физ.-мат., 1977, №5, с.45-48

Широко используются известные теоремы о разделимости, теоремы вложения пространств Соболева. При изучении нелинейных уравнений привлекаются "  $\epsilon$  " - регуляризация [4] и метод компактности.

Приложения. Полученные результаты носят теоретический характер и могут найти применение в спектральной теории дифференциальных операторов, гидродинамике, гидромеханике, при нахождении наилучших приближающих пространств, а также в дальнейшем изучении теории разделимости дифференциальных операторов.

Апробация работы. Результаты доложены и обсуждались на VIII республиканской межвузовской конференции по математике и механике (Алма-Ата, 1984), на конференции молодых ученых Алма-Атинской области (Алма-Ата, 1985), на конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября (Фрунзе, 1987), на семинарах академика АН КазССР О.А. Жаутикава (ИММ АН КазССР, 1985), члена-корреспондента АН Республики Казахстан профессора К.А. Касымсва (КазПИ, 1985), на общегородском семинаре под руководством члена-корреспондента АН Республики Казахстан профессора М.Отелбаева и члена-корреспондента АН Республики Казахстан профессора Т.И. Колыменова (КазГУ, 1987).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [1-6], список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 83 наименования (всего 103 страницы машинописного текста). Теоремы, леммы, формулы, примеры нумеруются тремя цифрами, из которых первая означает номер главы, вторая - номер параграфа, третья - порядковый номер внутри параграфа.

4. Муратбеков М.Б. Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора типа Шредингера. - Дифференциальные уравнения, 1991, т.27, №6, с.1034-1042

# СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность рассматриваемых задач, сформулированы основные результаты, приведены примеры и дан обзор литературы по теме диссертации.

Первая глава содержит 4 параграфа и посвящена изучению разделимости линейных операторов.

Первый параграф имеет вспомогательный характер в нем приведены необходимые обозначения и определения, сформулированы известные результаты, используемые в дальнейшем.

В § 2 изучается разделимость линейного дифференциального оператора нечетного порядка в весовых пространствах.

Через  $L_{p, \ell}(R)$ ,  $R = (-\infty, \infty)$  обозначено пространство, полученное пополнением множества  $C^\infty(R)$  по норме

$$\|f\|_{L_{p, \ell}(R)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\ell(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1)$$

где  $\ell(x)$  - непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:

$$C^{-1} \leq \ell(x)\ell(z) \leq C, \quad |x-z| \leq 1; \quad (2)$$

$$C^{-1}(|x|^c + 1)^{-1} \leq \ell(x) \leq C(|x|^c + 1). \quad (3)$$

Обозначим через  $L$  замыкание в норме (1) оператора, заданного на  $C^\infty(R)$  равенством

$$L y = -y^{(2n+1)} + q(x)y.$$

Определение. Оператор  $L$  называется разделимым в пространстве  $L_{p, \ell}(R)$ , если имеет место оценка

$$\|y^{(2n+1)}\|_{p, \ell} + \|q(x)y\|_{p, \ell} \leq C (\|Ly\|_{p, \ell} + \|y\|_{p, \ell}),$$

где  $C$  не зависит от  $y \in \mathcal{D}(L)$ ,  $\mathcal{D}(L)$  - область определения.

На функцию  $q(x)$  накладываем следующие ограничения:

$$\inf_{x \in R} q(x) \geq \delta > 0; \quad (4)$$

$$\sup \frac{q(x)}{q(z)} \leq C, \quad C \in (0, \infty); \quad (5)$$

$$\sup \{|x-z|^{-1} q^{-\alpha}(x) |q(x)-q(z)|\} < \infty, \quad (6)$$

где  $(2n+1)(1-\alpha) + \alpha > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ .

Теорема 1.2.1. Пусть выполняются условия (2), (3) и

(4)–(6), тогда при достаточно больших положительных  $\lambda$  :

а) оператор  $L + \lambda E$  в пространстве  $L_{p, \ell}(R)$  имеет ограниченный обратный;

б) оператор  $L$  разделим в  $L_{p, \ell}(R)$ ;

в) операторы  $\left(q(x)\right)^{1-\frac{k}{2n+1}} \frac{d^k}{dx^k} (L + \lambda E)^{-1}, (k=1, 2, \dots, 2n)$  ограничены в  $L_{p, \ell}(R)$ .

Пример. Пусть

$$L y = - y^{(2n+1)} + (\ell^{|x|} + 1) y \quad (7)$$

Здесь  $q(x) = \ell^{|x|} + 1$  и не трудно проверить, что функция удовлетворяет условиям (4)–(6). Следовательно, по теореме 1.2.1. оператор (7) разделим в пространстве  $L_{p, \ell}(R)$ .

В §3, используя теорему 1.2.1 предыдущего параграфа, докажем существование и гладкость решений одной краевой задачи в бесконечной полосе.

В области

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2\pi, -\infty < y < \infty\}$$

рассмотрим уравнение

$$Lu + \lambda u = - \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial y^{2n+1}} + (-1)^k B(y) \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \lambda u = f(x, y) \quad (8)$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=2\pi}, \quad (j=0, 1, 2, \dots, 2k-1) \quad (9)$$

Если  $u(x, y) \in L_2(\Omega)$ , то  $u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(y) e^{inx}$ .

Обозначим через  $L_{2, B(y)}^{2m+1, 2k}(\Omega)$  пространство функций, полученное пополнением множества функций  $C_0^\infty(\Omega)$ , удовлетворяющих условиям (9) относительно нормы

$$\|u, L_{2, B(y)}^{2m+1, 2k}(\Omega)\| = \left[ \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial y^{2m+1}} \right|^2 + |B(y) \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}|^2 + |u|^2 \right) dx dy \right]^{1/2} \quad (10)$$

Определение. Функция  $u \in L_2(\Omega)$  называется сильным решением задачи (8), (9), если существует последовательность  $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{(L + \lambda E) u_n\}$  сходится в норме  $L_2(\Omega)$  к  $u$  и  $f$  соответственно.

Справедлива

Теорема 1.3.1. Пусть функция  $B(y)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$B(y) \in C_{loc}(R), \quad B(y) \geq \delta > 0, \quad R = (-\infty, \infty) \quad (11)$$

$$C^{-1} \leq B(z) B^{-1}(y) \leq C \quad \text{при } |z - y| \leq 1 \quad (12)$$

$$|B(z) - B(y)| \leq C |z - y|^\alpha B^\alpha(y) \quad \text{при } |z - y| \leq 1 \quad (13)$$

где  $(2m+1)(1-\alpha) + \alpha > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$

Тогда при  $\lambda > 0$ :

а) для любого  $f \in L_2(\Omega)$  существует единственное сильное

решение  $u(x, y) = (L + \lambda E)^{-1} f$  задачи (8), (9);

б) при  $B \leq 2k$  оператор  $B(y) \partial_x^2 (L + \lambda E)^{-1}$

ограничен в  $L_2(\Omega)$ ;

в) оператор  $L$  разделим в  $L_2(\Omega)$ , т.е.

$$u \in L_{L, B(y)}^{2m+1, Lk}(\Omega).$$

В § 4 исследуется разделимость линейного дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом.

Пусть  $H$  - сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через  $H_1 = H_1(R, H)$  гильбертово пространство (также сепарабельное), полученное пополнением  $C_0^\infty(R, H)$  множество финитных бесконечно гладких вектор-функций, определенных на  $R$  со значением в  $H$  по норме

$$\|f(x)\|_{H_1} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx \right)^{1/2}$$

соответствующий скалярному произведению

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{H_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(x), g(x) \rangle_H dx$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(u) = -u''' + Q(x)u, \quad x \in R$$

определенное на  $C_0^\infty(R, H)$ , где  $Q(x)$  - операторная функция в  $H$ .

Замыкание  $L$  в норме  $H_1$  обозначим через  $L$ .

На операторную функцию  $Q(x)$  налагаем следующие условия:

I. Для почти всех  $x$  операторы  $Q(x)$  самосопряжены и равномерно по  $x$  полуограничены снизу, т.е. для всех

$f \in \mathcal{D}(Q(x))$  выполняется неравенство

$$\langle Q(x)f, f \rangle_H \geq C \langle f, f \rangle_H, \quad C > 0$$

и не зависит от  $x$ , где  $\mathcal{D}(Q(x))$  - общая всюду плотная в  $H$  область определения операторов  $Q(x)$ ;

II. При  $\lambda \gg 1$

$$\sup_{|x-y| \leq 2} \left\{ \| [Q(x) - Q(y)][Q(x) + I]^{-1} \|_H + \| [Q(y) - Q(x)][Q(y) + I]^{-1} \|_H \right\} \leq o(1);$$

III. Для почти всех  $x$  оператор  $Q(x)$  является обратным к вполне непрерывному оператору.

Теорема I.4.1. Пусть выполнены условия I - III. Тогда оператор  $L + LE$  имеет ограниченный обратный и оператор  $L$  разделим в пространстве  $H_1$ .

Пример I.4.1.

$$\text{Пусть } Lu = -u''' + Q(x)u, \quad H_1 = L_2(R, R^2) \quad (14)$$

$$\text{где } Q(x) = \begin{pmatrix} |x| + 1 & 0 \\ 0 & |x| + 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что матрица  $Q(x)$  удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда по теореме I.4.1. оператор (14) разделим в пространстве  $L_2(R, R^2)$ .

Пример I.4.2.

В области  $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq 1\}$  рассмотрим задачу

$$Lu = -u_{xxx} - u_{yy} + q(x, y)u = f(x, y) \in L_2(R, L_2(0, 1)), \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad (16)$$

Записываем уравнение (15) в операторном виде

$$-u'''(x) + Q(x)u(x) = f(x),$$

$$\text{где } Q(x) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q(x, y) \quad - \text{оператор}$$

Штурма-Диувиля, действующая в  $L_2(0, 1)$  для каждого  $x \in R$ .

Пусть  $q(x, y) \equiv |x| + |y| + 1$ ; нетрудно проверить, что

операторная функция  $Q(x)$  удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда по теореме 1.4.1 задача (15), (16) имеет единственное решение  $u(x, y)$ , такое, что  $u_{xxx} \in L_2(R, L_1(a, 1))$ .

Вторая глава работы посвящена изучению гладкости решений нелинейных уравнений и аппроксимативных свойств решений одного нелинейного дифференциального уравнения.

Гладкость решений нелинейных уравнений в случае неограниченной области стала изучаться сравнительно недавно. Впервые на этот вопрос обратили внимание М.Б. Муратбеков, М.Отелбаев [5], которые получили достаточные условия разделимости нелинейного оператора Штурма-Лиувилля со скалярным коэффициентом.

В § I главы 2 исследуются выше сформулированные вопросы для нелинейного уравнения с операторным коэффициентом

$$Lu = -u''' + Q(x, u)u = f(x) \quad (17)$$

в пространстве  $H_1 = H_1(R, 1)$ ,  $x \in R$ .

$Q(x, u)$  - непрерывная по обоим переменным операторная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) для почти всех  $x$  и  $u$  операторы  $Q(x, u)$  самосопряжены и являются обратными к вполне непрерывным операторам;

$$б) \quad \langle Q(x, u)f, f \rangle_H \geq S(x) \langle f, f \rangle_H,$$

5. Муратбеков М.Б., Отелбаев М. О гладкости решения нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля. - В кн.: Математика. Тез. докладов седьмой Казахской межвузовской конференции по математике и механике. Караганда, 1981, с. 34-35.

где  $S(x)$  - положительная функция, стремящаяся к  $+\infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ;

$$b) \sup_{|x-t| \leq 2} \sup_{|q-q_0|_H \leq 2A} \left\{ \left\| [Q(x, q) - Q(t, q_0)] [Q(x, q) + JE]^{-1} \right\|_H + \right. \\ \left. \left\| [Q(t, q_0) - Q(x, q)] [Q(t, q_0) + JE]^{-1} \right\|_H \right\} \leq T(A),$$

где  $T(A) < O(1)$  при  $A \gg 1$  для любого конечного числа  $A$ .

Теорема 2.1.1. Пусть выполнены условия а, б, в. Тогда существует число  $M(A, f) > 0$  и при  $A > M(A, f)$  уравнение (17) для любой правой части  $f \in H_1$  имеет решение  $u(x) \in H_1$  такое, что  $u'' \in H_1$ .

Пример. Задана система нелинейных дифференциальных уравнений, которая записывается в операторном виде так:

$$-u''' + Q(x, u)u = f(x) \in H_1 = L_2(R, R^2), \quad (18)$$

где

$$Q(x, u) = \begin{pmatrix} |x| + \|u\| + 1 & 0 \\ 0 & |x| + \|u\| + 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $Q(x, u)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.1., следовательно, уравнение (18) имеет решение  $u(x)$  такое, что  $u'' \in L_2(R, R^2)$ .

В § 2 рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$Lu = -p(x)(p(x)u(x))'' + q(x, u)u(x) = f(x) \in L_2(R) \quad (19)$$

изучается существование и гладкость его решения в пространстве  $L_2(R)$ .

Теорема 2.1.1. Пусть выполнены следующие условия:

а)  $q(x, u) \geq w > 0$  непрерывная функция по совокупности переменных в  $R^2$ ;

а)  $\rho(x) \geq \delta > 0$  - непрерывно дважды дифференцируемая функция;

$$в) \inf_{x \in R} \inf_{|c| \leq A} \{ \rho^{-2}(x) \rho(x, c) \} > 0;$$

$$г) \sup_{|x-y| \leq K(y)} \frac{\rho(y)}{\sqrt{\rho(y, c)}} \sup_{|c-c_1| \leq A} \left\{ \frac{\rho(x)}{\rho(y)}, \frac{\rho(x, c)}{\rho(y, c)} \right\} \leq F(A) < \infty,$$

где  $A$  - любое конечное число,  $F(A)$  - непрерывная функция,  $K(y)$  - непрерывная положительная функция, стремящаяся к  $+\infty$ , при  $|y| \rightarrow \infty$ .

Тогда для любого  $f \in L_2(R)$  существует решение  $u(x) \in L_2(R)$  уравнения (19) такое, что

$$\rho(x) (\rho(x) u(x))'' \in L_2(R).$$

Пример. Пусть

$$Lu = -\rho(x) (\rho(x) u(x))'' + e^{\beta|x|+|u|} u = f(x), \quad (20)$$

где  $\rho(x) > 0$  - бесконечно гладкая функция равная  $e^{\frac{1}{2}|x|}$  при  $|x| > 1$ ,  $\beta > 1$ .

Легко проверяются условия теоремы 2.1.1. Следовательно, уравнение (20) имеет решения  $u(x)$  такое, что  $\rho(x) (\rho(x) u(x))'' \in L_2(R)$ .

В § 3 изучается поведение  $K$  - поперечников множества решений нелинейного уравнения (19) из предыдущего параграфа.

Оценка линейных поперечников множеств, связанных с областью определения дифференциальных операторов возникает при исследовании резольвенты, спектральных свойств, а также вопросов полноты систем собственных и присоединенных элементов оператора, но очевидно, что они представляют самостоятельный интерес и имеют важное значение в теории приближений.

Нас будет интересовать двусторонняя оценка  $K$ .

поперечников по Колмогорову множества решений

$$M = \{ u \in W'_2(R) : \| -S(Qu)^n + q(x,u)u \|_2^2 \leq T \}$$

уравнения (19).

Обозначим через  $d_k = d_k(M, L_2)$  -  $k$  - поперечник по Колмогорову множества  $M$  в  $L_2(R)$ .

Поперечником по Колмогорову называется величина  $d_k$ , определенная следующим образом

$$d_k = \inf_{\{Z_k\}} \sup_{u \in M} \inf_{v \in Z_k} \|u - v\|_2,$$

где внешний *infimum* берется по всем подпространствам  $Z_k$  размерности  $m \leq k$ .

Через  $N(l)$  обозначим количество поперечников  $d_k$ , больших  $l > 0$ .

Теорема 2.3.1. Пусть функции  $S(x)$  и  $q(x,u)$  удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1. Тогда для количества поперечников  $N(l)$  множества  $M$  справедливы оценки

$$C^{-1} l^{-1/2} \int_{\Omega_{C,l}} S^{-1/2}(x) dx \leq N(l) \leq C l^{-1/2} \int_{\Omega_{C,l}} S^{-1/2}(x) dx,$$

где

$$\Omega_{C,l} = \{ x \in R : S^{-1/2}(x) q(x,0) \leq C^{-2} l^{-1} \},$$

$C$  - постоянная, вообще говоря, зависит от  $T$ .

Замечание. В этом параграфе получены оценки для  $N(l)$ . Но из оценки для  $N(l)$  сразу следует оценка для самих поперечников  $d_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Действительно, пусть  $N(l) \leq f(l)$ , где  $f(l)$  монотонно невозрастающая функция. Тогда

$k < N(d_k) \leq f(d_k)$ . Обозначим через  $F(\cdot)$  функцию, обратную к  $f(\cdot)$ , получим  $F(k) \geq F[f(d_k)] = d_k$ .

Аналогично, имея оценку  $N(l) \geq g(l)$ , где  $g(l)$  - монотонно не возрастает, получаем  $d_k \geq G(k)$ ,  $G(\cdot)$  - функция, обратная к  $g(\cdot)$ .

Пример. Пусть

$$-u'' + (|x| + |u| + 1)u = f(x) \in L_2(R). \quad (21)$$

Здесь

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x, u) = |x| + |u| + 1$$

Нетрудно проверить, что функция  $q(x, u)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1, тогда по этой теореме существует решение  $u(x) \in L_2(R)$  уравнения (21), такое, что  $u'' \in L_2(R)$ . А в силу теоремы 2.3.1 для функции распределение поперечников  $N(\lambda)$  множества

$$M = \{u \in L_2(R) : \| -u'' + (|x| + |u| + 1)u \|_2 \leq 1\}$$

справедлива оценка

$$-C^{-1} \lambda^{-1/2} + 2C^{-3} \lambda^{-3/2} \leq N(\lambda) \leq 2C^3 \lambda^{-3/2} - C \lambda^{-1/2}$$

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту АН Республики Казахстан профессору М.О. Отелбаеву и кандидату физико-математических наук, доценту М.Б. Муратбекову за их постоянное внимание к работе и всестороннюю помощь.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Тогочуев А.Ж. (в соавт. с Амановой Т.Т.). О разделимости дифференциальных операторов нечетного <sup>порядка</sup> // Деп. в ВИНТИ, N 3587-83. Деп. Ис. Реф. Известия АН Каз.ССР, сер. физ.-мат., 1983, N 5, -с.79.
2. Тогочуев А.Ж. О суммируемости решения дифференциального уравнения нечетного порядка с весом // - Известия АН Каз.ССР, сер. физ.-мат., 1983, N 5, -с.55-58.
3. Тогочуев А.Ж. О гладкости решений одного нелинейного дифференциального уравнения // - Тез. докл. конференции молодых ученых Алма-Атинской области, Алма-Ата, 1985, -с.223.
4. Тогочуев А.Ж. Коэрцитивные оценки для одного оператора неклассического типа // - Тезисы докладов VII республиканской межвузовской конференции по

математике и механике, посвященной 50-летию КазГУ имени С.М.Кирова. Алма-Ата, сент.1984.-с.51.

5. Тогочуев А.Ж. (в соавт. с Муратбековым М.Б). Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом // Тез. докл. конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября, Фрунзе, 1984.-с.72.
6. Тогочуев А.Ж. Гладкость решений нелинейного уравнения нечетного порядка с операторным коэффициентом // Тез. докл. конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября, Фрунзе, 1987.-с.71.

*А.Ж.Тогочуев*

Подписано в печать 17.02.1983      Формат 60x84/16

Печать офсетная. Объем 10 п. л. Зак. 87      Тир. 100

г. Бишкек, ул. Коммунистическая, 68. Типография КСХИ