УДК 517. +517 (075.8)

Шарипов К.С., Шарипов К.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

Академия ТК и ПС, Республика Казахстан

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ПРИХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ РАЙОНЫ УБЫТИЯ И ПРИБЫТИЯ

Впервые даны для собственных функций районы убытия и прибытия. Рассмотрим некоторую кривую

$$y = f(t), \ t \in [t_0, T] \tag{1}$$

удовлетворяющую заданному условию

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

называемому районом убытия кривой (1).

Ставим задачу: построить кривую (1) так, что она в момент времени $t = t_0$ выходит из района убытия (2) и в момент времени $t = T$ приходит в точку $y(T)$ связанную, в частности, уравнением окружности

$$y_0^2 + y^2(T) = r^2 \tag{3}$$

В дальнейшем уравнение связи (3) будем называть *уравнением района прибытия кривой* (1).

Объединим в одну задачу: найти кривую

$$y = f(t), \ t \in [t_0, T] \tag{5}$$

удовлетворяющую условиям

$$y(t_0) = y_0, \ y_0^2 + y^2(T) = r^2 \quad ? \tag{6}$$

Здесь y_0 и r - заданные числа.

Конечно такая задача ранее неисследовалась.

Предлагаем эту задачу решить нами разработанной теории *усовершенствованной задачи Коши*. Конечно, можно брать дифференциальное уравнение или интегральное уравнение.

Здесь поставленную задачу (5) – (6) исследуем по средством дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + p(t)y = g(t), \ t \in [t_0, T] \tag{7}$$

Образуем задачу уравнения

$$y' + p(t)y = g(t), \ t \in [t_0, T] \tag{8}$$

условия уравнения

$$y(t_0) = y_0, \ y_0^2 + y^2(T) = r^2 \tag{9}$$

Составим ее усовершенствованную задачу Коши

$$y' + p(t)y = g(t), \ t \in [t_0, T] \ (p(t), g(t) \in C_{[t_0, T]}) \tag{10}$$

1) начальное условие

$$(t_0) = y_0 \tag{11}$$

2) плюс, уравнения района убытие и прибытие

$$y_0^2 + y^2(T) = r^2 \tag{12}$$

Решение задачи Коши (10) –(11) имеет вид

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} g(s)ds, \ t \in [t_0, T] \tag{13}$$

Среди них ищем решение такое, что удовлетворялось уравнению района (12).Для чего используем метод, предложенный нами (см. [1]).

Имеем решение, порожденное под влиянием функции *g(t)*.

И ищем ее, в частности, в виде

$$g(t) = \beta f(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{14}$$

Здесь $f(t)$ – непрерывная функция, а β - параметр.

Тогда усовершенствованная задача Коши (11) – (12) имеет вид

$$y' + p(t)y = \beta f(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{15}$$

1) начальная условия

$$y(t_0) = y_0 \tag{16}$$

2) плюс, уравнение района убытия и прибытия

$$y_0^2 + y^2(T) = r^2 \tag{17}$$

Из (13)- получим решения задачи Коши (15) –(16) в виде

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \beta \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds\,, \tag{18}$$

Отсюда при $t = T$, согласно района убытия и прибытия имеет уравнение относительно параметра β.

$$y_0^2 + \left(y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} + \beta \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds \right)^2 = r^2$$

отсюда

$$\beta_{1/2} = \left(\pm\sqrt{r^2 - y_{02}} - y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}\right) \frac{1}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{S}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) имеем решение задачи Коши (15) – (16) в виде

$$y_{1/2} = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \left(\pm\sqrt{r^2 - y_{02}} - y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}\right) \frac{1}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{S}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \tag{20}$$

Полученное решение дает нам искомую кривую линию (5), удовлетворяющую условиям (6).

Отметим, что на параметрах (19) решение (20) задачи Коши (15) – (16) удовлетворяет уравнению района убытия и прибытия (17). Поэтому параметры (19) дают собственные значение уравнения (15). А кривые (20) дают нам собственных функций уравнения (15), которые соответствуют собственным значениям.

Район убытия и прибытия (17) решение (18) задачи Коши (15) – (16)

в плоскости $(y_0 \ \ 0 \ \ y(T))$ дает нам на параметрах (19) окружность вида

$$\boldsymbol{C}\!: y_0^2 + y^2(T) = r^2$$

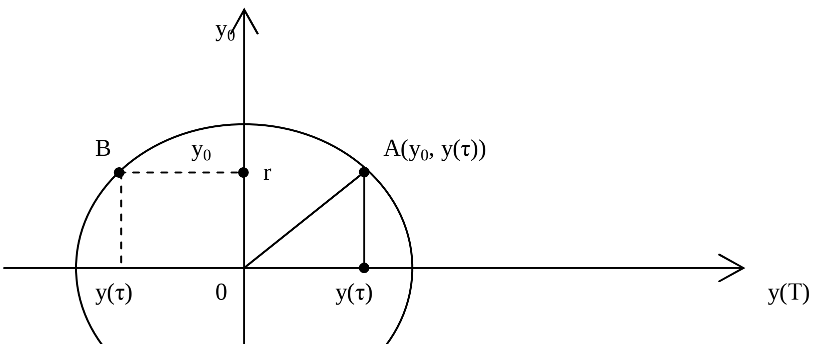


Рис.1

И так начальные условия y_0, лежащие на окружности ***C*,** переводится кривой линией (20) в точки этого же окружности ***C***.

1) Пусть $y_0 > 0$ значит $0 \le y_0 \le r$. Видно, что $-r \le y(T) \le r$. Значит точки $A(y_0, y(T))$, $B(y_0, -y(T))$ является симметричным. Пусть $0 < y(T) \le r$, $0 < y_0 \le r$.

Приведем график см. рис.2,рис.3.

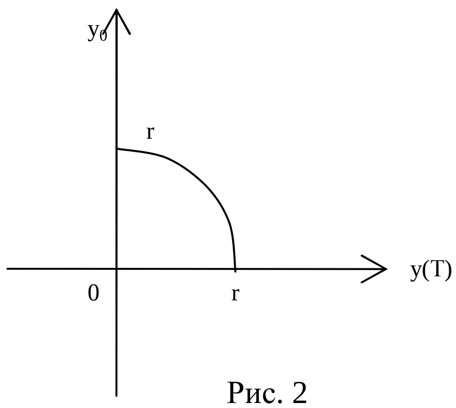


Рис. 2

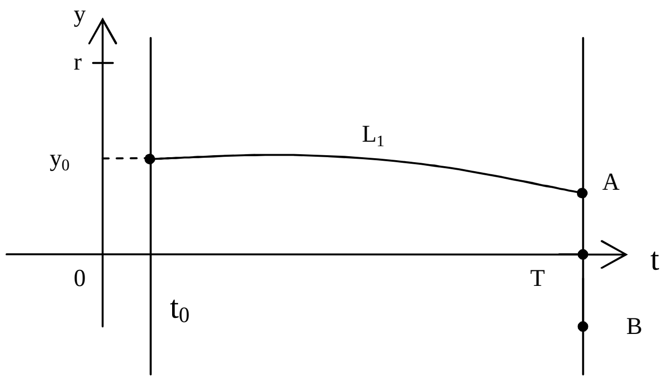


Рис. 3

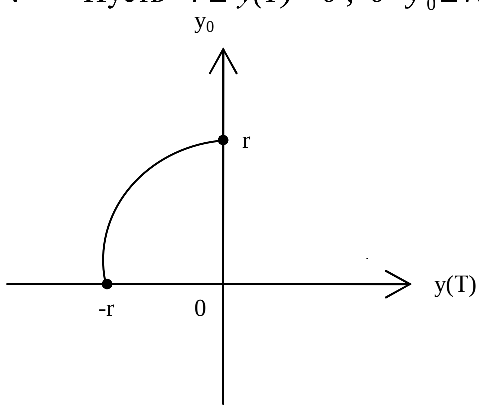
Уравнение кривой L_1 имеет вид

$$L_1: y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \left(\sqrt{r^2 - y_0^2} - y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}\right) \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \qquad (21)$$

Она обладает замечательным свойством, если $y_0 \to r$, то $y(T) \to 0$ и $y(T) \to r$, то $y_0 \to 0$.

Итак, собственные функции (21) отображают область $0 \le y_0 \le r$ в область $r \le y(T) \le 0$.

1”. Пусть $-r \le y(T) < 0$, $0 < y_0 \le r$. Приведем график см. рис.4, рис.5.



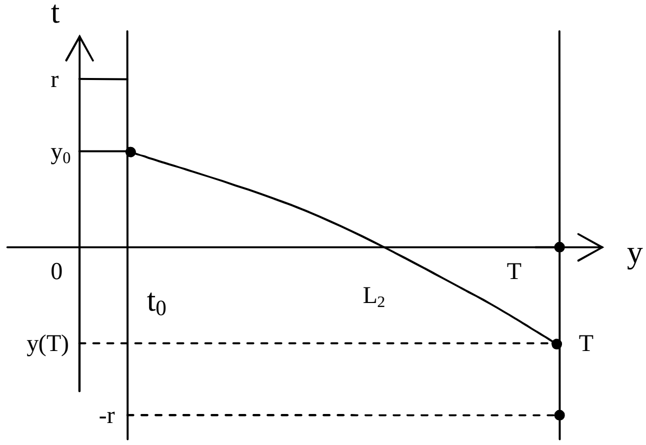


Рис.4 Рис. 5

Здесь кривая L_2 имеет вид :

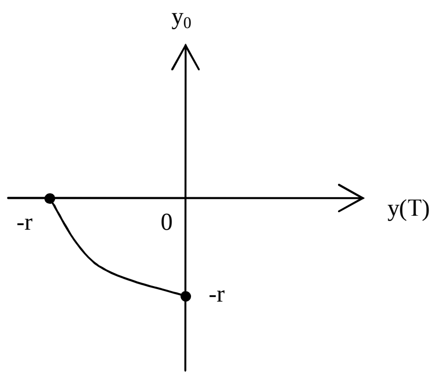
$$L_2 : y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - \left(\sqrt{r^2 - y_0^2} + y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \right) \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \qquad (22)$$

Она обладает замечательным свойством, если $y_0 \to r$, то $y(T) \to 0$ и $y(T) \to -r\, y_0 \to 0$.

Итак, собственные функции (22) отображают область $0 \le y_0 \le r$ в область $-r \le y(T) \le 0$.

2) Пусть $y_0 \le 0$. Значит $-r \le y_0 < 0$. Видно, что $-r \le y(T) \le 0$

2”. Пусть $-r \le y(T) \le 0$, $-r \le y_0 \le 0$. Приведем график см. рис.6, рис.7.



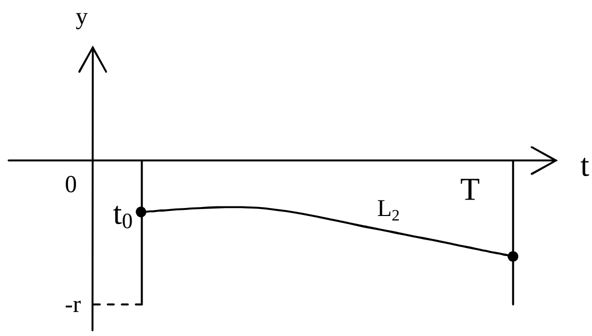


Рис.6 Рис.7

В этом случае действуют собственные функции (22) :

$$L_2 : y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - \left(\sqrt{r^2 - y_0^2} + y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \right) \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \qquad (23)$$

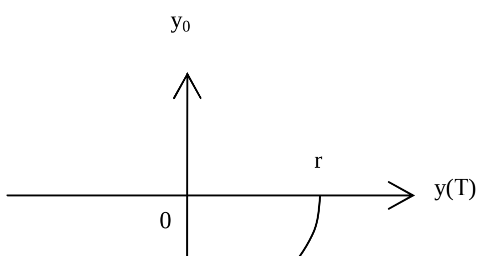
Приведем график см. рис. 7

Итак, собственные функции (23) отображают область $-r \le y_0 \le 0$ в область $-r \le y(T) \le 0$

Собственные функции (23) обладают свойством если $y_0 \to 0$, то $y(T) \to r$ и $y_0 \to -r$, то $y(T) \to 0$

2”. Пусть район прибытия и убытия: $0 \le y(T) \le r$, $-r \le y_0 \le 0$

Приведем график см. рис.8, рис.9.



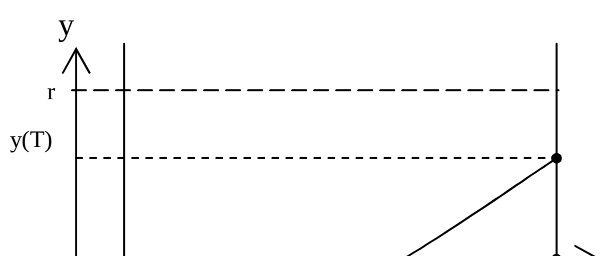


Рис.8 Рис.9

Собственные функции определяются формулой:

$$L_1: y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \left(\sqrt{r^2 - y_0^2} + y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}\right) \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \qquad (24)$$

Она обладает важным свойством, если $y_0 \to 0$, то $y(T) \to r$ и $y > -r$, то $y(T) \to 0$. Следовательно, собственные функции (24) отображают область $-r \le y_0 \le 0$ в область $0 \le y(T) \le r$ см. рис.9.

Здесь собственные значения (19) построены при подвижных начальных условиях (16) и уравнение района убытия и прибытия есть окружность (17).

Конечно, собственные значения (19) можно построить и при замороженном начальном условии (16) относительно заданной функции

*f(t).*Им соответствуют собственные функции (20) относительно *f(t).*

Литература:

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений. // Вестник ИГУ. №12, -Каракол, 2004.