УДК 517.2+517.9

Шарипов К.С., Шарипов С., Шарипов К.С.
*ЫГУ им. К.Тыныстанова*

## К ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Впервые нами усовершенствованной задачей Коши исследованы собственные значения и собственные функции однородных и неоднородных уравнений.

Нами предложен новый способ исследования задачи о собственных значениях, отличный от существующих методов, причем он охватывает однородные и неоднородные линейные и нелинейные дифференциальные уравнения [1-3].

Здесь, конечно, речь идет об управляющих собственных значениях и управляемых собственных функциях.

**Задачи о собственных значениях.**

В частности, начнем с простейших уравнений первого порядка:

$$1)\ y' + p(t) = 0, \quad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

$$2)\ y' + p(t)y = q(t), \quad t \in [t_0, T] \ (p(t), q(t) \in C_{[t_0,T]}) \tag{2}$$

Составим хорошо изученные задачи Коши:

$$\text{I}\ \ y' + p(t)y = 0, \ \ t \in [t_0, T] \tag{3}$$

начальное условие ( $p(t), q(t) \in C_{[t_0,T]}$)

$$y(t_0) = y_0 \tag{4}$$

$$\text{II}\ \ y' + p(t)y = q(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{5}$$

начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \tag{6}$$

Они имеют решения, непрерывные по переменным $x, y_0$.

Теперь, в частности, составим краевые задачи вида

$$\text{III}\ \ y' + p(t)y = 0, \ \ t \in [t_0, T] \tag{7}$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0, \ y(T) = y_1 \tag{8}$$

$$\text{IV}\ \ y' + p(t)y = q(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{9}$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0, \ y(T) = y_1 \tag{10}$$

По известной причине они не могут быть решены посредством общих решений

$$y = ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} \tag{11}$$

$$y = ce^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(t)dt} q(s)ds \tag{12}$$

соответственно уравнений (7) и (9).

Однако если мы можем сделать так, чтобы общие решения (11) и (12) содержали еще одну произвольную постоянную как параметр β, то разрешимость вышеприведенных краевых задач можно устанавливать легко.

Покажем это. Для чего рассмотрим краевую задачу с параметром вида [1-3]:

$$y' = f(t, y, \mu), \ t \in [t_0, T] \qquad (13)$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0, \ y(T) = y_1 \qquad (14)$$

в области

$$D = \{|t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b, \mu \in [d_1, d_2]\} \qquad (15)$$

Нами предположен новый метод исследования этой краевой задачи, называемый усовершенствованной задачей Коши вида:

$$y = f(t, y, \mu), \ t \in [t_0, T] \qquad (16)$$

1)начальное условие $y(t_0) = y_0$ (17)

2)плюс заданное условие $y(T) = y_1$ (18)

В области (15) задача Коши (16)-(17) исследована достаточно хорошо, когда в D функции

$f(t, y, \mu)$ и $f_y(t, y, \mu)$ (19)

есть непрерывные по переменным $t, y_0, \mu$.

Важным результатом является то, что она имеет решение непрерывное по переменным $t, y_0, \mu$

$$y = \varphi(t, y_0, \mu), \ t \in [t_0, T] \qquad (20)$$

это и есть первый этап решения усовершенствованной задачи Коши (16)-(18).

Второй этап. При $t = T$ из (20), согласно (17), имеем

$$\varphi(t, y_0, \mu) = y_1 \qquad (21)$$

Поставим задачу: существует ли значение параметра $\mu \in [d_1, d_2]$ такое, что выполняется равенство (21)?

Поэтому уравнение (21) будем называть характеристическим уравнением. Пусть оно имеет действительные и комплексные корни вида

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \lambda_1(y_0, y_1), \quad y_0, y_1 \in D_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \qquad (22) \\ &\mu_n = \lambda_n(y_0, y_1), \quad y_0, y_1 \in D_n \end{aligned}$$

Нас интересует случай, когда:

$$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in [d_1, d_2] \qquad (23)$$

В этом случае только и только значения (22) параметра $\mu$ можем рассматривать как функцию двух переменных $y_0, y_1$, т.е. функции от граничных условий $y_0, y_1$ с областями значений

$$\mu_1 \in Q_1, \mu_2 \in Q_2, ..., \mu_n \in Q_n \qquad (24)$$

Итак, в области $Q_1$ усовершенствованная задача Коши (16)-(18) имеет решение, непрерывное по переменным $t, y_0, \mu_1$ вида

$$y_1 = \varphi_1(t, y_0, \mu_1), \ \ \mu_1 = \lambda_1(y_0, y_1), \ t \in [t_0, T] \qquad (25)$$

А в области $Q_2$ она имеет решение вида

$$y_2 = \varphi_2(t, y_0, \mu_2), \ \mu_2 = \lambda_2(y_0, y_1), \ t \in [t_0, T] \qquad (26)$$

Наконец, в области $Q_n$ она имеет решение вида

$$y_n = \varphi_n(t, y_0, \mu_n), \ \mu_n = \lambda_n(y_0, y_1), \ t \in [t_0, T] \qquad (27)$$

Эти решения могут быть действительными и комплексными, причем непрерывными по переменным $t, y_0, y_1$.

Ранее нами значения (22) параметра $\mu$, согласованные с условием (23), были названы управляющими величинами.

Теперь в дальнейшем управляющие величины, согласованные с условием (23), предлагаем называть собственными значениями усовершенствованной задачи Коши (16)-(18) и соответствующие им решения (25)-(27) будем называть её собственными функциями.

А область $Q_1$ называем спектром параметра $\mu_1$, а $Q_2$ - спектром параметра $\mu_2$ и, наконец, $Q_n$ -спектром параметра $\mu_n$.

Отметим, что собственные значения (22) согласованные с (23), также являются собственными значениями краевой задачи (13)-(14).

О существовании собственных значений.

Если в $D$ функции $f(t, y, \mu)$ и $f_y(t, y, \mu)$ непрерывны, то краевая задача (13)-(14) имеет собственные значения как корни (23) характеристического уравнения (21).

Задачи о собственных значениях нетрадиционных краевых задач.

При такой правой части уравнения (13) задачу о собственных значениях можно исследовать и как задачу управления вида

$$\text{I} \quad y' = f(t, y, \mu), \ t \in [t_0, T]$$

условия управления

$$y(t_0) = y_0, \ y'(t_0) = y'_0$$

$$\text{II} \quad y' = f(t, y, \mu), \ t \in [t_0, T]$$

условия управления

$$y(t_0) = y_0, \ y'(T) = y'_1$$

Такие задачи впервые рассмотрены нами.

Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим одно уравнение (или их системы) вида

$$y' + p(t)y = \mu y, \ t \in [t_0, T], \ (|\mu| < +\infty) \qquad (28)$$

с краевыми условиями

$$y(t_0) = y_0, \ y(T) = y_1 \qquad (29)$$

Составим её усовершенствованную задачу Коши в виде

$$y' = y(\mu - p(t)), \quad t \in [t_0, T] \qquad (30)$$

1)начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \qquad (31)$$

2)плюс заданное условие

$$y(T) = y_1 \qquad (32)$$

Задача Коши вида (30)-(31) имеет решение вида

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} (\mu - p(s))ds} = y_0 e^{\mu(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \ t \in [t_0, T] \qquad (33)$$

Отсюда, согласно (32), имеем характеристическое уравнение вида

$$y_0 e^{\mu(T-t_0)-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} = y_1 \qquad (34)$$

При $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq 0$ оно имеет бесчисленное множество решений вида

$$\mu_k = \frac{1}{T-t_0}(\ln\frac{y_1}{y_0} + 2\pi ki) + \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds \quad (k = 0, \pm1, \pm2, ...) \qquad (35)$$

Эти значения $\mu_k$ дают нам собственные значения уравнения (30). Собственные функции усовершенствованной задачи Коши (30)-(32) определяются из (33) и (35) в виде

$$y_k = y_0 e^{\mu_k(t-t_0)-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \quad t \in [t_0, T] \qquad (36)$$

Периодические собственные функции.

Особым родам движения, конечно, является периодическое движение.

Теперь предстоит выделить из совокупности бесчисленных собственных функций (36) периодические собственные функции. Для чего используем классическое условие периодичности [4]

$$y_0 = y_1 \qquad (37)$$

Тогда собственные значения, дающие периодические собственные функции, при выполнении условия (37) из (35) имеют вид

$$\mu_k = \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds \quad (k=0) \qquad (38)$$

Мы получим единственное собственное число усовершенствованной задачи Коши (30)-(32), которому соответствует собственная функция

$$y = y_0 e^{\frac{t-t_0}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds - \int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \quad t \in [t_0, T] \qquad (39)$$

Она есть действительная функция.

Рассмотрим краевую задачу из [4] вида

$$y' + p(t)y = \mu y, \quad t \in [t_0, T] \qquad (40)$$

краевое условие

$$Ay(t_0) + By(T) = 0 \quad (A, B\text{-числа}) \qquad (41)$$

Составим усовершенствованную задачу Коши, в частности, в виде

$$y' + p(t)y = \mu y, \quad t \in [t_0, T] \qquad (42)$$

1)начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \qquad (43)$$

2)плюс заданное условие

$$y(T) = -\frac{A}{B} y_0 \qquad (44)$$

В этом случае из (33), согласно (44), имеем характеристическое уравнение в виде

$$y_0 e^{\mu(T-t_0)-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} = -\frac{A}{B} y_0 \quad (A \neq 0, B \neq 0) \qquad (45)$$

отсюда собственные значения имеют вид

$$\mu_k = \frac{1}{T-t_0}\ln\frac{A}{B} + 2\pi ki + \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds \quad (k = 0,\pm1,\pm2,...) \quad (46)$$

Теперь находим собственные функции краевой задачи (40)-(41) в виде

$$y_k = y_0 e^{\mu_k (t-t_0) - \int_{t_0}^{T} p(s)ds}, \quad t\in[t_0,T] \qquad (47)$$

как собственные функции усовершенствованной задачи Коши (39)-(41).

Периодические собственные функции.

Известно, условие периодичности

$$y_0 = y_1 \qquad (48)$$

тогда из (44) имеем, что при

$$\frac{A}{B} = -1 \qquad (49)$$

выполняется (48).

Собственные значения из (46) имеют вид

$$\mu_k = 2\pi ki + \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds, \quad (k = 0,\pm1,\pm2,...) \qquad (50)$$

Они являются комплексными числами.

В этом случае из (47) получаем периодические собственные функции, соответствующие собственным числам в виде

$$y = y_0 e^{(2\pi ki + \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} p(s)ds)(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)ds}, \quad t\in[t_0,T] \qquad (51)$$

Они являются комплексными периодическими собственными функциями.

Задача о собственных функциях нетрадиционных краевых задач.

Рассмотрим задачу управления вида

$$y' + p(t)y = \mu y, \quad t\in[t_0,T] \qquad (52)$$

краевые условия

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0' \qquad (53)$$

Составим усовершенствованную задачу Коши в виде

$$y' + p(t)y = \mu y, \quad t\in[t_0,T] \qquad (54)$$

1)начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \qquad (55)$$

2)плюс заданное условие

$$y'(t_0) = y_0' \qquad (56)$$

Из (33), согласно (56), имеем характеристическое уравнение в виде

$$y_0(\mu - p(t_0)) = y_0' \qquad (57)$$

При $y_0 \neq 0$ имеем бесчисленное множество действительных собственных значений в виде

$$\mu = \frac{y_0'}{y_0} + p(t_0), \quad y_0 \in (-\infty,0)\nu(0,\infty), \quad y_0' \in (-\infty,\infty) \qquad (58)$$

В этом случае собственные функции усовершенствованной задачи Коши (54)-(56)

определяются формулой

$$y = y_0 e^{\left(\frac{y_0'}{y_0} + p(t_0)\right)(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}, \quad t \in [t_0, T] \qquad (59)$$

Они также служат собственными функциями для задачи управления (52)-(53).

Продолжение данной статьи следует.

Литература


1. Шарипов С., Шарипов К.С. Основные теоремы дифференциального исчисления урчуктных (разрывных) функций. // Вестник Ысык-Кульского университета. (Каракол, Кыргызстан), 2003, № 9, 55-66
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений. // Вестник Ысык-Кульского университета. (Каракол, Кыргызстан), 2004, № 12, 159-163
3. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения нагреженных дифференциальных и интегральных уравнений. // Вестник Ысык-Кульского университета. (Каракол, Кыргызстан), 2005, № 13, 78-82.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969.