УДК 371.3

Урсеитов О.У., Жапарова С.Н.
ИГУ им. К.Тыныстанова

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ.

В статье получены элементы треугольника с известными сторонами, с доказательством, которые в школьном учебнике отсутствуют. Элементы треугольника в школьных учебниках даны с доказательством, взяты как справочные материалы. В статье важен не её результат, он известен, не метод решения - он очевиден, но важно осмысление решения треугольника.

В школьной программе и учебнике по геометрии решение треугольника по известным длинам сторон треугольника даются в виде как справочные материалы. Дается только понятие.

Доказательств нет. В связи с этим возникла необходимость получения формулы для составления алгоритма в расчете технических задач. Пусть даны стороны треугольника (рис. 1). AB=c, BC=a, AC=в. Решением треугольника являются:

- определение длины медианы;
- определение длины высот;
- определение длины биссектрисы;
- определение значений углов;
- определение длины радиуса, описанного и выписанного окружности;
- расчет площади.

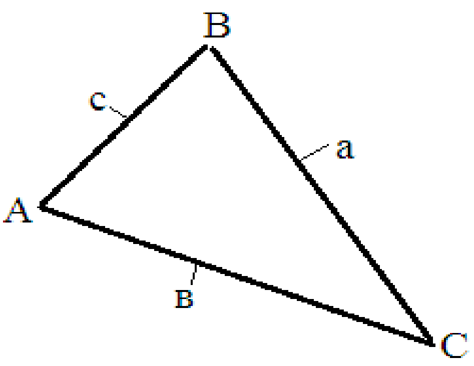

Рис. 1

Выше перечисленные значения треугольника вычисляем с доказательством. Для этого исходными теоремы будут формула Пифагора, теорема синуса и косинуса.

Определение длины медиан (рис. 2). Медианами треугольника считаются прямые, соединяющие вершины треугольника половины сторон: L_a, $L_в$, L_c.Точки разделяющие сторон пополам обозначаем: H, T, M. Докажем длины медиан L_a через известные стороны треугольника a, в, c. Для этого дополнительно обозначаем углы при вершине A, B, C через α, β, γ. Применяем теорему косинуса для треугольника ΔBHC и ΔABC системы. Согласно теоремы косинуса угла получим системы равенств.

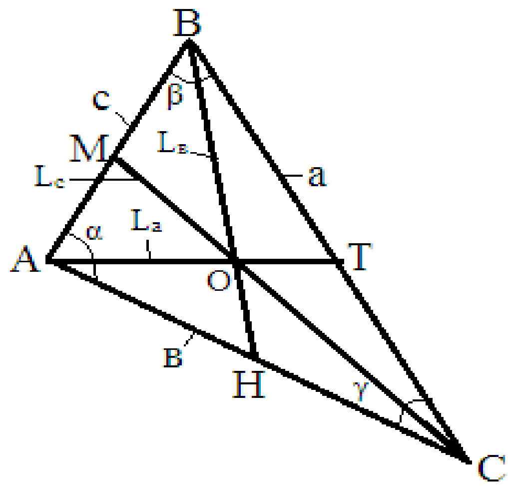

Рис. 2

$\begin{cases} L_в^2 = \left(\frac{в}{2}\right)^2 + a^2 - 2\frac{в}{2}a\cos\gamma \\ c^2 = a^2 + в^2 - 2aв\cos\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_в^2 = \left(\frac{в}{2}\right)^2 + a^2 - aв\cos\gamma \\ c^2 = a^2 + в^2 - 2aв\cos\gamma \end{cases}$ левая и правая части первого уравнения умножаем на 2 получим системы $\begin{cases} 2L_в^2 = 2\left(\frac{в}{2}\right)^2 + 2a^2 - 2aв\cos\gamma \\ c^2 = a^2 + в^2 - 2aв\cos\gamma \end{cases}$ выражаем из первого и второго равенства системы (-2aвcosγ) приравняв их получим равенства $2L_в^2 - \left(\frac{в}{2}\right)^2 - 2a^2 = c^2 - a^2 - в^2$ выражаем $L_в^2$.

$L_в^2 = \dfrac{c^2 - \frac{1}{2}в^2 + a^2}{2} = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - в^2}{4}$. Отсюда определяем искомые задачи длины медианы Lв через стороны треугольника а, в, с.

$L_в = \dfrac{\sqrt{2(c^2 + a^2) - в^2}}{2}$. Таким образом, все длины медиан:

$$L_a = \frac{\sqrt{2(c^2 + в^2) - a^2}}{2} \qquad (1)$$

$$L_в = \frac{\sqrt{2(c^2 + a^2) - в^2}}{2} \qquad (2)$$

$$L_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + в^2) - c^2}}{2} \qquad (3)$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (О). Эта точка является центом тяжести треугольника, который широко применяется в технике. Точка (О) длины медиан разделяет на части

$$OC = \frac{2}{3}L_c \; OM = \frac{1}{3}L_c$$

$$OA = \frac{2}{3}L_a \; OT = \frac{1}{3}L_a$$

$$OB = \frac{2}{3}L_в \; OH = \frac{1}{3}L_в$$

Определение длины высот (рис. 3). Высотой треугольника h_a, $h_в$, h_c считаются: длина линии, отпущенная $\perp$ с вершины треугольника к основанию. Для доказательства применяем формулу Пифагора. Докажем высоты h_c через стороны треугольника а, в, с. Из треугольника ΔHBC и ΔAHC имеем системы $\begin{cases} h_c = \sqrt{a^2 - (HB)^2} \\ h_c = \sqrt{в^2 - (AH)^2} \end{cases}$.

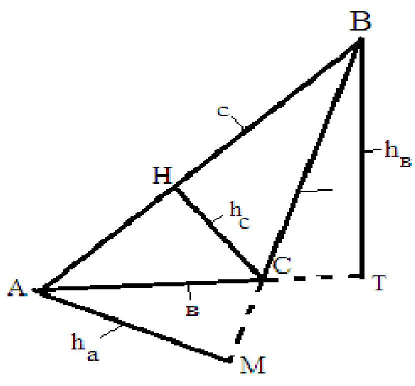

Рис. 3

С одной стороны c=HB+AH: ⇒ AH=c-HB значение AH поставим во второе уравнение системы и преобразуем.

$$\begin{cases} h_c^2 = a^2 - (HB)^2 \\ h_c^2 = в^2 - (AH)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_c^2 = a^2 - (HB)^2 \\ h_c^2 = в^2 - (c - HB)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_c^2 = a^2 - (HB)^2 \\ h_c^2 = в^2 - (HB^2 - 2cHB + c^2) \end{cases}$$ $\Rightarrow a^2-(HB)^2=в^2-(HB)^2+2cHB-c^2$ отсюда получим равенство $a^2=в^2-c^2+2cHB$. Выражаем $HB = \frac{a^2 - в^2 + c^2}{2c}$ подставим в первом равенстве второй системы и производим ряд преобразований:

$$h_c^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - в^2 + c^2}{2c}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 - в^2 + c^2)^2}{4c^2} = \frac{(2ac)^2 - (a^2 - в^2 + c^2)^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{(2ac - (a^2 - в^2 + c^2))(2ac + a^2 - в^2 + c^2)}{4c^2} = \frac{(в^2 - (a^2 - 2ac + c^2))(a^2 + 2ac + c^2 - в^2)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(в^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - в^2)}{4c^2} = \frac{(в - a + c)(в + a - c)(a + c - в)(a + c + в)}{4c^2}.$$ $a+в+c=p$ периметр треугольника. Тогда получим $h_c = \frac{\sqrt{p(p-2a)(p-2в)(p-2c)}}{2c}$. Получим искомые соотношения высоты h_c через стороны треугольника а, в, с

$$h_c = \frac{\sqrt{p(p-2a)(p-2в)(p-2c)}}{2c} \qquad (4)$$

$$h_a = \frac{\sqrt{p(p-2a)(p-2в)(p-2c)}}{2a} \qquad (5)$$

$$h_в = \frac{\sqrt{p(p-2a)(p-2в)(p-2c)}}{2в} \qquad (6)$$

Если высоты $h_в$ сдвигать через стороны АС и высоты h_a через стороны СВ, тогда все высоты пересекаются в одной точке.

Определение длины биссектрисы (рис. 4). Биссектрисой называем линию соединения середины угла α, β, γ с противолежащими сторонами.

Введем обозначения биссектрис через L_α, L_β, L_γ. Для доказания соотношения биссектрисы L_α через сторон треугольника а, в, с применяем площадь треугольника ΔАВС, ΔАМС и ΔАМВ.

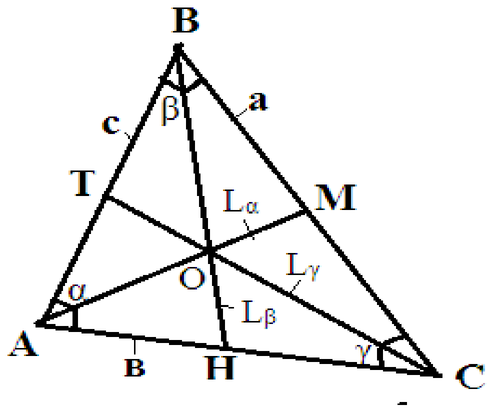

Рис. 4

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} cв \sin\alpha \\ S_{AMC} = \frac{1}{2} L_\alpha в \sin\frac{\alpha}{2} \\ S_{AMB} = \frac{1}{2} L_\alpha c \sin\frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = S_{AMC} + S_{AMB} \Rightarrow \frac{1}{2} cв \sin\alpha = \frac{1}{2} L_\alpha в \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} L_\alpha c \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}(в+c)L_\alpha$. Отсюда выражаем: $L_\alpha = \frac{cв\sin\alpha}{(в+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2cв\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{(в+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2cв\cos\frac{\alpha}{2}}{(в+c)}$.

Соотношения $\cos\frac{\alpha}{2}$ со стороны треугольника а, в, с применяем [1]

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{cв}}$. Дальше преобразуем, где p=$\frac{a+в+c}{2}$ полупериметр.

$$\frac{p(p-a)}{cв} = \frac{\frac{a+в+c}{2}\left(\frac{a+в+c}{2}-a\right)}{cв} = \frac{\frac{a+в+c}{2}\left(\frac{a+в+c-2a}{2}\right)}{cв} = \frac{(a+в+c)(в+c-a)}{4cв} =$$
$$= \frac{(в+c)^2-a^2}{4cв}.$$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(в+c)^2-a^2}{4cв}}$. Тогда длина биссектрисы L_α будет $L_\alpha = \frac{2cв\cos\frac{\alpha}{2}}{(в+c)} = \frac{2cв\sqrt{\frac{(в+c)^2-a^2}{4cв}}}{(в+c)} = \frac{\sqrt{\frac{4c^2в^2((в+c)^2-a^2)}{4cв}}}{(в+c)} = \frac{\sqrt{cв(в+c)^2-a^2}}{в+c}$. Таким образом, биссектрисы определяются:

$$L_\alpha = \frac{\sqrt{cв(в+c)^2-a^2}}{в+c} \qquad (7)$$

$$L_\beta = \frac{\sqrt{ca(a+c)^2-в^2}}{a+c} \qquad (8)$$

$$L_\gamma = \frac{\sqrt{вa(в+a)^2-в^2}}{в+a} \qquad (9).$$

Биссектрисы треугольника L_α, L_β, L_γ пересекаются в одной точке.

Углы треугольника определяются через стороны треугольника а, в, с (рис. 2)

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a^2+c^2-в^2}{2ac} \\ \cos\beta = \frac{c^2+c^2-a^2}{2cв} \\ \cos\gamma = \frac{a^2+в^2-c^2}{2aв} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = arc\cos\frac{a^2+c^2-в^2}{2ac} \\ \beta = arc\cos\frac{c^2+c^2-a^2}{2cв} \\ \gamma = arc\cos\frac{a^2+в^2-c^2}{2aв} \end{cases} \qquad (I)$$

Определения длины радиуса, описанной окружности (рис. 5). Для определения радиуса, описанной окружности, R из середины сторон восстанавливается перпендикуляр. Точка пересечения линии с вершиной и есть радиус R. MC=BM=$\frac{a}{2}$; AT=TC=$\frac{в}{2}$; AN=NB=$\frac{c}{2}$.

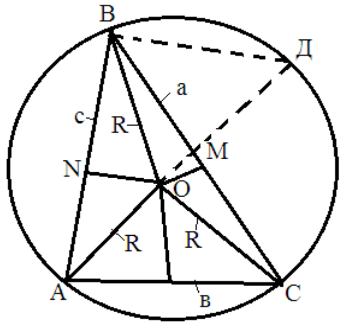

Рис. 5

Для доказательства соотношения S_{ABC}, (a, в, c) и R прямую AO продолжим до пересечения с дугой окружности (рис. 5) получим точку Д. Дуга $\cup$ AB опирается на углы $\angle$C и $\angle$Д. Тогда $\angle C = \angle Д$. Из ΔАВД sinД=$\frac{c}{2R}$. Площадь треугольника ABC

S=$\frac{1}{2}$ вasinC=$\frac{1}{2}$ ва sinД=$\frac{авс}{4R}$.

Отсюда получаем искомые соотношения. R=$\frac{авс}{4S}$ (10)

Определение длины радиуса, вписанной окружности (рис. 6). Для определения радиуса, вписанного треугольника проводятся биссектрисы, из точки пересечения их восстанавливаются перпендикуляры на стороны треугольника. Высота ON=OM=OT=r. Для доказательства соотношения S_{ABC}, (a, в, c) и r берем площадь треугольника S_{OBC},

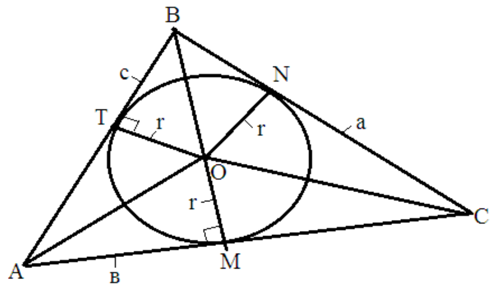

Рис. 6

S_{AOC}, S_{AOB}.S_{ABC}=S; S=$\frac{1}{2}$ ar+$\frac{1}{2}$ вr+$\frac{1}{2}$ cr=r$\left(\frac{a+в+c}{2}\right)$=rp отсюда искомые соотношения

r=$\frac{S}{p}$ (11)

Определения площади треугольника. Площадь треугольника определяется тремя способами:

- формулой Герона S=$\sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$ (12), где p - полупериметр треугольника.

- через основания и высоты треугольника (рис. 3) S=$\frac{1}{2}$ ch_c=$\frac{1}{2}$ ah_a=$\frac{1}{2}$ $вh_в$ (13)

- через две стороны и углы синуса между ними (рис. 4).

S=$\frac{1}{2}$ aвsinγ=$\frac{1}{2}$ acsinβ=$\frac{1}{2}$ cвsinα (14).

В заключение следует отметить, что формулы (1), (2), (3) для расчета длины медиан в школьном учебниках не имеется, есть только в специальном справочнике по математике. Формулы (4), (5), (6) для расчета высот отсутствуют и в школьном учебнике и специальном математическом справочнике. Формулы (7), (8), (9) для расчета биссектрисы положение точно такое же, как расчета медиан. Формула (10) для расчета радиуса около описанного окружности в школьном учебнике нет доказательства. Формула (11) для расчета радиуса около вписанного окружности точного также как (10). Формулы (12), (13), (14) для расчета площади треугольника справочного характера. Формулы для расчета угла треугольника в [I] системе справочного характера.

Литература:

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике (для инженеров и учащихся ВТУЗов).-М., 1981.