УДК 517.22

Муканов Т.А., Ниязбаева Т.С.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПО ШВАРЦУ

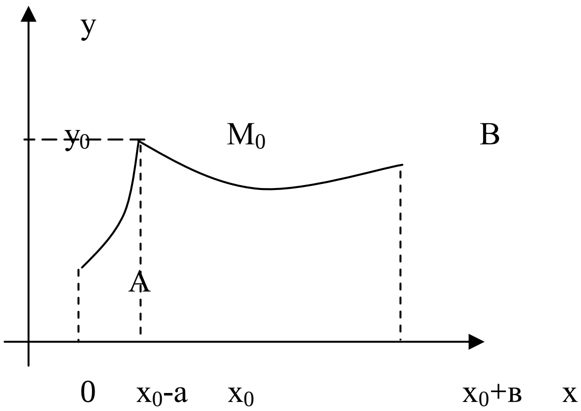
В данной статье рассматривается определенный интеграл от функции дифференцируемой по Шварцу по аналогии формулы нахождения определенного интеграла Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если} \quad x_0-a\le x<x_0, \quad a>0,\\ y_0, & \text{если} \quad x=x_0,\\ \psi(x), & \text{если} \quad x_0<x\le x_0+b, \quad b>0\end{cases}$ (1)

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на сегменте $[x_0-a, x_0+b]$ и удовлетворяют условию

$$\varphi(x_0-0)=\psi(x_0+0)=y_0, \qquad \varphi'(x_0-0)\ne\psi'(x_0+0) \tag{2}$$

Функцию, заданную равенством (1) и удовлетворяющее условию (2) назовем **крылатой функцией**, а точку $M_0(x_0, y_0)$, **излома графика** функции или **точкой соединения крыльев** графика функции (см. рис.).



Кривая $\overset{\frown}{AM_0}$ **левое крыло** есть график функции $\varphi(x)$, а кривая M_0B **правое крыло** есть график функции $\psi(x)$.

Как известно [2], **левая производная функции** $\varphi(x)$ в точке x_0 определяется равенством

$$\varphi'(x_0-0)=\lim_{h\to 0+}\frac{\varphi(x_0-h)-\varphi(x_0)}{h}\ , \tag{3}$$

а **правая производная** функции $\psi(x)$ в точке x_0 определяется равенством

$$\psi'(x_0-0)=\lim_{h\to 0+}\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h} \tag{4}$$

Так же имеет место теорема:

<u>Теорема 1:</u> Если выполняется условие $\varphi'(x_0-0)=\psi'(x_0+0)$, то функция $f(x)$ определенная равенством (1) дифференцируема по Ньютону и имеет место равенство

$$f'(x_0)=\varphi'(x_0-0)=\psi'(x_0+0) \tag{5}$$

В условиях **теоремы 1** $M_0(x_0, y_0)$ будет **точкой гладкости** графика функции, и через эту точку проходит единственная касательная прямая.

Будем так же предполагать, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема по Ньютону в промежутке $[x_0 - a, x_0]$, а функция по Ньютону в промежутке $[x_0, x_0 + b]$. А функция $f(x)$ не дифференцируема по Ньютону в самой точке x_0, то есть имеет место условие (2).

Как известно $[3]$, обобщение производной Шварца (ОПШ) в точке x_0 определяется равенством

$$f'(x_0, \alpha, \beta) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0 - \alpha h)}{(\alpha+\beta)h}, \quad \text{где} \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0 \qquad (6)$$

и находится формулой

$$f'(x_0, \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\alpha\varphi'(x \ -0) + \beta\psi'(x_0 + 0)\right] \qquad (7)$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ **дифференцируема по Шварцу** в точке x_0, если существует ОПШ.

Имеют место теоремы:

<u>Теорема 2:</u> Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы по Ньютону в точке x_0, то функция $f(x)$ в этой точке дифференцируема по Шварцу.

Обратная теорема не всегда верна, то есть существуют примеры, которые дифференцируемы по Шварцу, но не дифференцируемы по Ньютону.

Если имеет место условие (5), то из формулы (7) имеем

$$f'(x_0, \alpha, \beta) = f'(x_0) \qquad (8)$$

Определенный интеграл от функции дифференцируемой по Шварцу определим, по аналогии формулы Ньютона-Лейбница, равенством

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt, \qquad x \in [x_0 - a, x_0 + b], \qquad a > 0, b > 0. \qquad (9)$$

Очевидно, $$\begin{matrix} f'(t) = \varphi'(t), & \textit{если} & x_0 - a \leq t < x_0 & \textit{и} \\ f'(t) = \psi'(t), & \textit{если} & x_0 < t \leq x_0 + b & \end{matrix} \qquad (10)$$

Найдём обобщение производной Шварца функции $f(x)$ в точке x_0 определенной формулой (9). Для чего найдем

$$f(x_0 + \beta h) = \int_{x_0}^{x \ +\beta h} f'(t)dt + y_0, \qquad f(x_0 - \alpha h) = \int_{x_0}^{x_0 - \alpha h} f'(t)dt + y_0, \text{где } \alpha > 0, \beta > 0, h > 0 \quad (11)$$

Используя формулу (6), имеем

$$f'(x_0, \alpha, \beta) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + \beta h) - f(x_0 - \alpha h)}{(\alpha+\beta)h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{(\alpha+\beta)h}\left(\int_{x_0}^{x_0+\beta h} f'(t)dt - \int_{x_0}^{x_0-\alpha h} f'(t)dt\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{(\alpha+\beta)h}\left[(\psi(x_0 + \beta h) - \psi(x_0)) - (\varphi(x_0 - \alpha h) - \varphi(x_0))\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{(\alpha+\beta)h}\left[\psi(x_0 + \beta h) - \varphi(x_0 - \alpha h)\right] = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\beta\psi'(x_0 + 0) + \alpha\varphi'(x_0 - 0)\right].$$

И так ,теорема доказана.

<u>Теорема 3:</u> Пусть функция $f(x)$ определена равенством (1) и функции $\varphi(x)$,

$\psi(x)$ дифференцируемы по Ньютону на промежутки $[x_0-a, x_0)\cup(x_0, x_0+b]$ и имеет место условие (2), то верно равенство

$$f'(t)=\begin{cases}\varphi'(t), & \text{если} \quad x_0-a\le t<x_0;\\ f'(x_0,\alpha,\beta) & \text{если} \quad t=x_0;\\ \psi'(t), & \text{если} \quad x_0<t\le x_0+b\end{cases} \tag{12}$$

Из равенства (12) заключаем, что по формуле (9) определяется определённый интеграл от разрывной функции, где точка x_0 является **точкой разрыва 1 рода с конечным скачком.**

Рассмотрим пример.

Пусть задана функция $f(x)=\begin{cases}x, & \text{если} \quad x>0\\ 0, & \text{если} \quad x=0\\ -x, & \text{если} \quad x<0\end{cases}$, $\quad x\in[-a,b], a>0, b>0$

Ясно, что $\varphi(x)=-x$ при $-a\le x<0$, $\psi(x)=x$, при $0<x\le b$ и $f(0)=0.$ Эта функция непрерывна на отрезке $[-a,b]$ и в точке $x_0=0$ выполняется условие (2), так как $\varphi'(0-0)=-1$, $\psi'(0+0)=1$. По формуле (7) имеем:

$$f'(0,\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha+\beta}(\beta-\alpha).$$

По этому функция $f(x)$ по формуле (9) определяется равенством

$$f(x)=\int_0^x\begin{Bmatrix}-1, & \text{если} \quad -a\le t<0\\ (\beta-\alpha)/(\alpha+\beta), & \text{если}\, t=0\\ 1, & \text{если}\, 0<t\le b\end{Bmatrix}dt, \qquad x\in[-a,b] \; .$$

Литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественных переменных. - М: Наука , 1984.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. I, II. -М.: Высшая школа, 1970.
3. Муканов Т.А. Следствие формулы нахождений обобщённой производной Шварца. - Каракол: Вестник ИГУ им. К. Тыныстанова, № 9, 2003.