УДК 51(07):371,3

Салыков С.С., Жапарова С.Н., Салыкова Н.С.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН АЙРЫМ ТЕОРЕМАЛАРЫН ДАЛИЛДӨӨДӨ ИНТЕРАКТИВДҮҮ ЫКМАЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Макалада мектеп геометриясынын салыштырмалуу түрдө жаңы бөлүмү болгон вектордук алгебранын окуучулар тарабынан өздөштүрүүдө айрым кыйынчылыктарды пайда кылган теоремаларын окутуунун технологиясы негиздүү түрдө талдоого алынып, бир катар методикалык сунуштар келтирилет.

В работе рассмотрены технологии обучения доказательствам ряда теорем векторной алгебры, относительно нового раздела школьного курса геометрии, вызывающие некоторые затруднения учащихся и приводятся обоснованные методические рекомендации.

Вектор түшүнүгү азыркы математиканын фундаменталдуу түшүнүктөрүнүн бири болуп, ал физика, химия, география, астрономия сыяктуу илимдерде да кеңири колдонулат. Геометрияда бул түшүнүктүн маанилүү экендигин атактуу немец математиги Г.Вейль 1918-жылы Евклиддин геометриясынын вектордук аксиоматикасын сунуш кылуу менен көрсөтө алган.

Вектор темасы 1968-жылы кабыл алынган программага ылайык орто мектептин математика курсуна киргизилип, планиметрия курсунда төмөнкүдөй мазмун сунушталат: вектор, вектордун абсолюттук чоңдугу жана багыты, вектордун координатасы, векторлорду кошуу, векторду санга көбөйтүү, вектордун скалярдык көбөйтүүсү [2, 169-173], [3, 155-157]. Теманын илимий-методикалык өзгөчөлүгү катарында анын көпчүлүк мазмуну координаттык негизде берилгенин жана вектордук методду колдонуу менен геометриялык маселелерди чыгаруу көндүмдүктөрүн толук түрдө калыптандыруу максаты коюлбай турганын көрсөтүүгө болот.

Геометриядан жана физикадан алынган вектордук (параллель жылдыруу, күч, ылдамдык, ылдамдануу ж.б.) жана скалярдык чоңдуктарга (кесиндинин узундугу, аянт, көлөм, масса, тыгыздык ж.б.) кыскача мүнөздөмө берүү менен, алардын жалпы жактарына жана өзгөчөлүктөрүнө окуучулардын көңүлүн буруп, вектор түшүнүгүнүн тек-түрдүк аныктамасы (“Вектор багытталган кесинди”) окуучуларга сунушталат.

Каракол шаарынын жана Ысык-Көл областынын айрым мектептеринде (№ 4 гимназия орто мектеби, Түп районунун Кең-Суу орто мектеби) педагогикалык практика учурунда жана атайын жүргүзүлгөн байкоолор көрсөткөндөй, окуучулар (А.В.Погореловдун окуу китебин пайдаланууда) сөз болуп жаткан бөлүмдөгү бир катар негизги теоремаларды өздөштүрүүдө кыйынчылыктарга дуушар болушат. Теореманын структуралык элементтерин (түшүндүрүүчү бөлүгү, шарты, корутундусу) тактап бөлүп алууда, далилдөөнүн планын түзүүдө, далилденүүчү корутундунун жетиштүү шартын көрсөтүүдө так эместикке жол берилип, чаташуулар, ал тургай, кээде туура эмес ой жүгүртүүлөр да байкалды (Байкоо жүргүзүү 8-9 класстарда ишке ашырылып, жалпысынан, 130-135 окуучунун билимдеринин сапатын текшерүү менен салыштырылганын белгилеп кетели).

Окутуу процессине ишмердүүлүк катарында мамиле кылган концепцияга [1, 74-75] таянуу аркылуу вектордук методду колдонуу менен теоремаларды далилдөөнүн негизин түзө турган өзгөчө акыл иш-аракеттерин, ошондой эле вектордук барабардыкты далилдөөнүн жалпы идеясын окуучулар тарабынан өздөштүрүүсүнө жетишүү алардын билимдериндеги байкалган кемчиликтерди өз учурунда жоюуга өбөлгө түзөрүн практика көрсөттү.

Алгачкы сабактарда адегенде векторлордун багыттары жана абсолюттук чоңдуктары боюнча алардын барабардыгынын белгиси окуучуларга сунушталса, андан ары координаттары менен берилген векторлордун барабардыгынын критерийи берилет. Окуучулар тарабынан бул түз жана тескери теоремаларды (критерийди) өздөштүрүүсүн

жеңилдетүү үчүн бир катар методикалык ыкмаларды колдонуу сунушталат. Жалпы алганда, бул бөлүмдө тиешелүү теормаларды далилдөөдө салттуу синтетикалык метод менен бирдикте эле координаттык метод да кеңири колдонула турганын белгилейли.

Түз теореманын (“Барабар векторлор тиешелүү түрдө барабар координаталарга ээ болушат”) далилдөөсүн интерактивдүү окутуунун элементин камтыган эвристикалык аңгеме методун колдонуу менен төмөндөгүдөй көнүгүүлөрдүн системасын чыгаруу түрүндө берүү сунушталат:

$\overline{A_1A_2}$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ эки вектору берилип, $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ болсун дейли.

1. Векторлордун барабардыгынын аныктамасын бергиле (Окуучудан параллель жылдыруу менен дал келишкен эки вектор барабар векторлор деп аталат деген жооп күтүлөт).

2. Параллель жылдыруунун формуласын жазгыла (Окуучулар, $x'=x+a$, $y'=y+в$ деген формулаларды эстерине түшүрөт).

3. A_1' жана A_2' чекиттеринин координаталарын A_1жана A_2 чекиттеринин координаталары аркылуу жазгыла (Окуучулар, $x_1' = x_1$+c; $y_1' = y_1$+d; $x_2' = x_2$+c; $y_2' = y_2$ +d деген формуланы жазышат).

4. $\overline{A_1A_2}$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ векторлорунун координаталарын таап, аларды салыштыргыла (Окуучулар аныктамага алып келүү операциясын колдону аркылуу алынган $\overline{A_1A_2}$ $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$; $\overline{A_1'A_2'}$ $(x_2+c-x_1-c,\ y_2+d-\ y_1-d)$ б.а. $\overline{A_1'A_2'}$ $(x_2-x_1,\ y_2-\ y_1)$ деген корутундуларга таянышып, $\overline{A_1A_2}$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ векторлорунун тиешелүү координаталары барабар экендиги жөнүндө жыйынтык чыгарышат).

Эми тескери теореманын далилдөөсүн издөөгө окуучуларды активдүү катыштыруу максатында аларга төмөнкүдөй тапшырмаларды аткарууну сунуштайбыз.

Мейли, $\overline{A_1A_2}$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ векторунда координаттары барабар болсун жана $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, $A_1'(x_1',y_1')$, $A_2'(x_2';y_2')$ чекиттери координаттары менен берилсин.

1. $\overline{A_1A_2}$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ векторлорунун координаттарын жазгыла (Окуучулар векторлордун координатасы түшүнүгүнүн аныктамасына таянышып, $\overline{A_1A_2}$ $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ жана $\overline{A_1'A_2'}$ $(x_2'-x_1', y_2'-y_1')$ деген вектордук туюнтмаларды жазышат).

2. Теореманын шартына таянып, тиешелүү координаттык барабардыкты жазгыла (Окуучулар, $x_2-x_1=x_2'-x_1'$, $y_2-\ y_1=y_2'-y_1'$ деген жазууну көрсөтүшөт).

3. 2-кадамдан параллель жылдыруунун формуласын алууга болобу? (Окуучулар $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$ деген формулаларды жалпылоо менен, $x' = x + x_1' - x_1$, $y' = y + y_1' - y_1$деген жазууну көрсөтүшөт).

4. 3-кадамда алынган параллель жылдыруу берилген чекиттерди кандай чекиттерге которот? (Окуучу тиешелүү аныктамаларга таянуу менен, $x' = x + x_1' - x_1$, $y' = y + y_1' - y_1$ формуласы менен берилген жылдыруу A_1 чекитин A_1' чекитине, ошондой эле B_1 ди B_1'чекитине которо турганын айтат).

5. Жогорку кадамдардан тиешелүү корутундуну чыгаргыла (Окуучу $\overline{A_1A_2}$ = $\overline{A_1'A_2'}$ деген вектордук барабардыкка келет).

Бул критерий далилденгенден кийин “вектордук барабардыкты далилдөө үчүн анын оң жана сол жагында жазылган веторлордун тиешелүү координаттарынын барабар экендигин негиздеп көрсөтүү жетиштүү болот” деген вектордук барабардыктарды далилдөөнүн жалпы идеясына окуучулардын көңүлүн атайлап буруп коюу зарыл.

Координаталары менен берилген эки вектордун суммасы түшүнүгү ($a(a_1,a_2)+в(в_1,в_2)=c(a_1+в_1;\ a_2+в_2)$) киргизилгенден кийин бөлүмдөгү негизги теоремалардын бири болгон векторлорду кошуунун «Үч бурчтук эрежесин» негиздеген, “$\forall$A,B,C/ $\overline{\grave{A}\hat{A}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}} = \overline{\grave{A}\tilde{N}}$ (1) деген ырастоонун далилдөөсүн жогоруда көрсөтүлгөн, координаттар аркылуу вектордук барабардыкты далилдөөнүн жалпы идеясына таянуу менен, төмөндөгүчө берүү максатка ылайык.

Берилди: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ чекиттери, (1) вектордук барабардыкты далилдөө үчүн төмөнкүлөрдү аткаруу жетиштүү:

Өркүндөтүлгөн анализ методун колдонуу менен теореманын корутундусу үчүн жетиштүү шарт табылган далилдөөнүн бул планын, негизинен, аныктамага келтирүү операциясын колдонуу менен ишке ашырууну окуучуларга сунуштоого болот.

Теореманын далилдөөсүн кыскача сүйлөмдөрдүн удаалаштыгы түрүндө жазып чыгууну класста кандайдыр бир жол менен түзүлгөн (мисалы, саноо менен) чакан топтун бирөөнө сунуштоого болот.

1) $\overline{\grave{A}\hat{A}}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ - вектордун координатасынын аныктамасы боюнча;

2) $\overline{\hat{A}\tilde{N}}$ $(x_3-x_2;\ y_3-y_2)$ - аныктама боюнча;

3) $\overline{\grave{A}C}$ $(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$ - аныктама боюнча;

4) $\overline{\grave{A}\hat{A}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}}$ $(x_3-x_2+x_2-x_1;\ y_3-y_2+y_2-y_1)$ - векторлордун суммасынын аныктамасы боюнча;

5) $\overline{\grave{A}\hat{A}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}}$ $(x_3-x_1;\ y_3-y_1)$ -4-кадамдан жөнөкөйлөтүүнүн натыйжасы;

6) $\overline{\grave{A}\hat{A}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}} = \overline{\grave{A}C}$ -3 жана 5-кадамдардан, векторлордун барабардыгынын аныктамасы боюнча.

Вектордун санга бөлгөн көбөйтүндүсү жана векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү жөнүндөгү теоремалардын далилдөөсүн жогоркуларга окшош эле окуучулардын активдүү акыл ишмердүүлүгүн, өркүндөтүлгөн анализ, жарым-жартылай изилдөө, чакан топ түзүү аркылуу иштетүү, ротация ж.б. логиканын жана окутуунун методдорун колдонуу аркылуу уюштуруу сунушталат. Маселен, вектордун скалярдык көбөйтүндүсү жөнүндөгү теореманын (Вектордун скалярдык көбөйтүндүсү алардын абсолюттук чоңдуктарынын алардын арасындагы бурчтун косинусуна болгон көбөйтүндүсүнө барабар) далилдөөсүн төмөнкүдөй таблица түрүндө, окуучулардын таанып-билүү активдүүлүгүнө таянуу менен берүү максатка ылайык (1-таблица).

Көрүнүктүү психолог Н.А.Менчинская белгилегендей, түшүнүктү практикада жана теорияда колдоно билүү аны өздөштүрүү сапаттарынын (толуктук, ийкемдүүлүк, ыкчамдык ж.б.) көрсөткүчү болуп эсептелет [1; 234]. Ал эми В.В.Давыдовдун оюу боюнча, түшүнүктү өздөштүрүү дегенибиз - ошол түшүнүк аркылуу чагылдырылган предметтер жана кубулуштардын белгилерин билүү, өздөштүрүү менен бирге, түшүнүктү практикада колдоно билүү дегендик. Окутуунун психологиясынын негизги принциптеринин бири болуп билим менен иш-аракеттин (баарыдан мурда, акыл) биримдиги эсептелет. Бул айтылгандардан вектордук алгебранын элементтерин окутуунун мазмуну катарында эле кароо жетишсиз болуп, ошону менен бирге эле аны теоремаларды далилдөөдө жана маселелерди чыгарууда колдоно билүү билгичтиктерине окуучуларды ээ кылуу өтө маанилүү экендиги келип чыгат. Бул максатта, баарыдан мурда, вектордук метод менен математикалык ырастоолорду далилдөөнү жүргүзүү билгичтиктеринин составына кирген төмөнкүдөй өзгөчө акыл-иш аракеттерине окуучуларды ээ кылуу абзел:

1) Фигуралардын ортосундагы, геометриянын тилинде берилген катыштарды вектордун тилине которуу жана тескери багытта иш-аракеттерди аткаруу;

2) Векторлордук үстүнөн тиешелүү операцияларды аныктамаларга ылайык жүргүзүү;

3) Векторду кандайдыр бир эки вектордун суммасы, айырмасы же вектордун санга көбөйтүндүсү түрүндө көрсөтүү;

4) Вектордук алгебранын закондорунун жана скалярдык көбөйтүндүнүн касиеттерине таянуу менен, вектордук барабардыкты өзгөртүп түзүү;

5) Векторлордун ортосундагы катнаштардан алардын узундуктарынын ортосундагы катнаштарга өтүү.

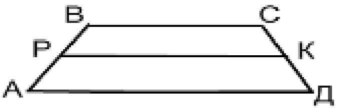
Акыл иш-аракеттерин этаптар боюнча калыптандыруу теориясына ылайык, окуучулардын вектордук методду өздөштүрүүсүн камсыз кыла турган эффективдүү жол болуп вектордук метод менен теоремаларды далилдөөнү жүргүзүү билгичтигинен ар бир компонентин алдын-ала этаптарга иштеп чыгуу эсептелет. Бул компоненттердин негизгиси болгон, фигуралардын арасындагы геометриянын тилинде берилген катнаштарды векторлордун тилине кайрадан формулировкалоо иш-аракетине окутууда фигуралардын арасындагы негизги катыштар эки тилде тең берилген төмөнкүдөй таблицаны колдонуу сунушталат (2-таблица).

Мисал катарында, трапециянын орто сызыгы анын негиздерине параллель жана алардын жарым суммасына барабар экендигин вектордук метод менен далилдейли.

Берилди. АВСД трапеция, РК орто сызыгы, АД жана ВС-негиздери.

Далилдөө. РК||АД,

РК= $\frac{1}{2}$ (АД+ВС).



Бул теореманын далилдөөсү берилген сабактын эвристикалык аңгеме түрүндө берилген фрагментин келтирели.

Мугалим: Бул маселени чечүү үчүн векторлордун касиетин колдонобуз. Векторлорду колдонуу менен, АД жана РК кесиндилерин параллель экенин кантип далилдейбиз?

Окуучу: $\overline{ÀÄ}$ жана $\overline{ÐÊ}$ векторлорунун коллинеардуу экенин далилдөө жетиштүү, б.а., $\overline{ÐÊ}$=x. $\overline{ÀÄ}$ шартын калыптандыруучу x саны жашашын көрсөтүү керек. Андан ары өз ара пикирлешүү улантылып, төмөнкүдөй вектордук барабардыктар алынат да, натыйжада, теореманын далилдөөсү аяктаганы белгиленет:

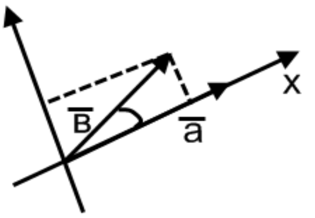
РВСК төрт бурчтугунан $\overline{ÐÊ} = \overline{ÐÂ} + \overline{ÂÑ} + \overline{ÑÊ}$, АРКД дан $\overline{ÐÊ} = \overline{ÐÀ} + \overline{ÀÄ} + \overline{ÄÊ}$ алынып, алардын суммасы $2* \overline{ÐÊ} = \overline{ÐÂ} + \overline{ÂÑ} + \overline{ÑÊ} + \overline{ÐÀ} + \overline{ÀÄ} + \overline{ÄÊ}$ болот. Акыркы барабардыкты өзгөртүп түзүү сунушталат:

$2* \overline{ÐÊ} = (\overline{ÐÂ} + \overline{ÐÀ}) + (\overline{ÑÊ} + \overline{ÄÊ}) + (\overline{ÂÑ} + \overline{ÀÄ}) = \overline{ÂÑ} + \overline{ÀÄ}$, себеби $\overline{ÐÂ} + \overline{ÐÀ} = 0$, $\overline{ÑÊ} + \overline{ÄÊ} = 0$, мындан $\overline{ÐÊ} = \frac{\overline{ÂÑ} + \overline{ÀÄ}}{2}$, демек, $\overline{ÐÊ} = \frac{1}{2}\left|\overline{ÂÑ} + \overline{ÀÄ}\right|$ (2) экени келип чыгат. Бул барабардыкты колдонуу менен андан ары РК// АД катнашы алынат.

Жыйынтыктап айтканда, мектеп программасы үчүн салыштырмалуу түрдө жаңы болгон вектордук алгебранын негизги сүйлөмдөрүн, теоремаларды өркүндөтүлгөн анализ, эвристикалык аңгеме жана интерактивдик ыкмалар сыяктуу окуучулардын активдүү акыл иш-аракеттерин камсыз кыла турган методдорду колдонуу аркылуу алардын математика боюнча билимдеринин сапаттуу болушуна жетишүүгө болот.

1-таблица

№	Ырастоо	Негиздөө, корутундулар
1.	$\overline{a}$ (a_1, a_2), $\overline{â}$ ($в_1$,$в_2$) $\overline{a} * \overline{â}$ = a_1 $в_1$+ a_2 $в_2$ φ-векторлордун арасындагы бурч	Векторлорду скалярдык көбөйтүүнүн аныктамасы, шарт боюнча
2.	$(\overline{a} + \overline{â})^2 = \overline{a}^2 + \overline{â}^2 + 2\overline{a}\,\overline{â}$	Кыскача көбөйтүүнүн формуласынын негизинде
3.	$\mid \overline{a} + \overline{â} \mid^2 = \mid \overline{a} \mid^2 + \mid \overline{â} \mid^2 + 2\overline{a}\,\overline{â}$	$\overline{a}\,\overline{â}$ скалярдык көбөйтүндүсү координата системасын тандоого көз каранды эмес.

4.	$\overline{a}(\lvert\overline{a}\rvert,0)$, $\hat{a}$(вcosφ, вsinφ) $\overline{a}=\lvert\overline{a}\rvert$, $a_2=0$, $в_1=\lvert\hat{a}\rvert$cosφ, $в_2=\lvert\hat{a}\rvert$sinφ	 Координата системасын атайын тандап алууга ылайык
5.	$\overline{a}\,\hat{a}==\lvert\overline{a}\rvert\lvert\hat{a}\rvert$cosφ+0*$\lvert\hat{a}\rvert$ sinφ	Аныктама-формулага ордуна коюу менен.

2-таблица

№	**Геометриянын тилинде**	**Вектордук тилде**
1.	AB│││СД	$\overline{\grave{A}\hat{A}}=\kappa*\overline{\tilde{N}\ddot{A}}$
2.	AB⊥СД	$\overline{\grave{A}\hat{A}}*\overline{\tilde{N}\ddot{A}}=0$
3.	А - түз сызык, А, В, С түз сызыкка тиешелүү чекиттер	$\overline{\grave{A}\hat{A}}=\kappa.\ \overline{\hat{A}\tilde{N}}$ же $\overline{\grave{A}\tilde{N}}=\kappa.\ \overline{\hat{A}\tilde{N}}$ же $\overline{\grave{A}\tilde{N}}=\kappa*\overline{\grave{A}\hat{A}}$
4.	С чекити АВ шооласында жатат. $\frac{\overline{\grave{A}\tilde{N}}}{\overline{\tilde{N}\hat{A}}}=\frac{m}{n}$	AC=$\frac{m}{n}$*CB, же $\overline{\hat{I}\tilde{N}}=\frac{m}{m+n}*\overline{\hat{I}\grave{A}}+\frac{n}{m+n}*\overline{\hat{I}\hat{A}}$, m,n∈R
5.	AC=CB	$\overline{\hat{I}\tilde{N}}=\frac{1}{2}(\overline{\hat{I}\grave{A}}+\overline{\hat{I}\hat{A}})$ -О чекити эрктүү чекит.
6.	ОАВС параллелограмм	а) $\overline{\hat{I}\hat{A}}=\overline{\hat{I}\grave{A}}+\overline{\hat{I}\tilde{N}}$, б) $\overline{\hat{I}\grave{A}}=\overline{\tilde{N}\hat{A}}$ же $\overline{\hat{I}\tilde{N}}=\overline{\grave{A}\hat{A}}$

Адабияттар:

1. Бекбоев Б.И. Инсанга багыттап окутуу технологиясынын теориялык жана практикалык маселелери. -Бишкек: Педагогика, 2003.
2. Бекбоев И.Б., Салыков С.С. ж.б. Геометрияны 7-9 класстарда окутуу: Мугалимдер үчүн методикалык колдонмо. -Бишкек: Педагогика, 2003.
3. Погорелов А.В. Геометрия. Орто мектептин 7-11 классы үчүн окуу китеби. -Бишкек: Мектеп, 1993.
4. Рогановский И.М. Методика преподавания математики в средней школе. -Минск: Вышейшая школа, 1990.