УДК 532.546

Мурзакматов М.У., Исабеков К.А.
ИГУ им. К.Тыныстанова

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПЛАНОВОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Приводятся алгоритм приближенного решения задачи по определению поля напоров и водопроводимости пласта и результаты численных экспериментов.

Для решения задач фильтрации подземных вод (как прогнозных, так и идентификационных) необходимо располагать определенным объемом информации о гидрогеологических параметрах. В зависимости от степени изученности области фильтрации в некоторых дискретных множествах точек могут задаваться значения напорной функции H(x,y), коэффициента фильтрации k(x,y), водопроводимости T(x,y), упругой водоотдачи $\mu(x,y)$ и инфильтрации f(x,y). По этим неполным данным необходимо восстановить картину течения жидкости, т.е. идентифицировать фильтрационный поток.

Пусть в области фильтрации заданы значения напора и водопроводимости

$$H(x_i, y_i)=H_i^э, \qquad (x_i, y_i)\in R_q, \quad i=1,2,...,q, \tag{1}$$

$$T(x_i, y_i)=T_i^э, \qquad (x_i, y_i)\in S_p, \quad i=1,2,...,p, \tag{2}$$

где $H_i^э$, $T_i^э$ – значения указанных величин, полученные из эксперимента или путем наблюдений; R_q и S_p – некоторые дискретные множества, состоящие из q и p точек соответственно. Требуется доопределить значения напоров и водопроводимости в области D, где заданы множества R_q и S_p, считая остальные параметры потока известными. Такая задача рассматривалась в работах [1, 2]. Здесь мы приводим результаты численных экспериментов.

В стационарном случае плановый фильтрационный поток описывается уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+QH=f, \quad (x,y)\in D \tag{3}$$

с краевым условием

$$T\frac{\partial H}{\partial n}-\beta H=\alpha, \qquad (x,y)\in\Gamma=\partial D, \tag{4}$$

где $Q=Q(x,y)$, $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$ – заданные функции.

Используем алгоритм решения задачи, предложенный в [1], который состоит в последовательном решении задачи (3), (4) относительно H(x,y) и T(x,y) с использованием условий (1) и (2). Задача (3), (4) решается методом конечных элементов. Разбивая область D на m треугольников (элементов), решение этой задачи ищем в пространстве $W_2^{(1)}$ в виде

$$H_n(x,y)=\sum_{(e)}(H_i^eN_i^e+H_j^eN_j^e+H_k^eN_k^e)=\sum_{s=1}^{n}H_sN_s(x,y), \tag{5}$$

$$T_n(x,y)=\sum_{(e)}(T_i^eN_i^e+T_j^eN_j^e+T_k^eN_k^e)=\sum_{s=1}^{n}T_sN_s(x,y), \tag{6}$$

где $H_s=H(x_s, y_s)$, $T_s=T(x_s, y_s)$ – значения искомых функций в точке (x_s, y_s); $N_s(x,y)=a_s+b_sx+c_sy$, (s=i, j, k) – базисные функции [3]; n– число узлов сетки; e – элемент (треугольник) с вершинами i, j, k. Вершины элементов располагаются таким образом, чтобы точки множеств R_q и S_p совпадали с ними.

Алгоритм решения задачи строится следующим образом. В первом приближении задаем значения функции T(x,y) произвольным образом из интервала $[T^{э}_{min}, T^{э}_{max}]$, а в узлах, совпадающих с точками множества S_p, задаем значения $T_i^{э}$. Применяя к задаче (3), (4) с условием (1) обобщенный принцип Галеркина, получаем систему уравнений

$$\iint_D N_i(LH_n - f)\ d\sigma + \delta\sum_{s=1}^{q}(H_s - H_s^{э}) + \int_{\Gamma} N_i(lH_n - \alpha)\ ds = 0, \tag{7}$$

i=1,2,...n.

Здесь L и l – операторы уравнений (3) и (4) соответственно:

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial}{\partial x}\ \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\ \right) + Q\ ,$$

$$l = T\frac{\partial}{\partial n}\ - \beta,$$

δ – положительное число (штраф).

С учетом формулы Грина из системы уравнений (7) приходим к системе

$$\iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)d\sigma + \iint_D N_i Q H_n d\sigma + \delta\sum_{s=1}^{q} H_s - \int_{\Gamma} N_i \beta H_n ds =$$

$$= \iint_D N_i f d\sigma + \delta\sum_{s=1}^{q} H_s^{э} + \int_{\Gamma} N_i \alpha\ ds, \qquad \text{i=1,2, ..., n.}$$

После подстановки вместо H_n ее разложения (5) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H_j = g_i, \qquad \text{i=1,2 ..., n,} \tag{8}$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\ d\sigma + \iint_D N_i N_j Q\ d\sigma - \int_{\Gamma} N_i N_j \beta\ ds + \delta_j,$$

$$g_i = \iint_D N_i f\ \ d\sigma + \int_{\Gamma} N_i \alpha\ \ ds + \sum_{s=1}^{q_i}\delta_s H_s^{э}\ .$$

Здесь q_i – число узлов шаблона, центром которого является узел i (включая сам узел i);

$$\delta_s = \begin{cases} \delta,\ \ \textit{если значение } H_s^{э} \textit{ задано,} \\ 0,\ \ \textit{если } H_s^{э} \textit{ не задано,} \qquad s = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Решение $H^{(1)}$(x,y) системы (8) является первым приближением напорной функции H(x,y). Используя полученные значения $H_i^{(1)}$ (i=1,2,...,n) и условие (2), решаем задачу (3), (4) относительно водопроводимости T(x,y). Здесь, кроме выполнения внутренних условий (2), потребуем также, чтобы градиент вариации искомой функции стремился к нулю. Это требование должно обеспечить требуемую гладкость функции T(x,y). Тогда вместо (7) получаем систему

$$\iint_D N_i(LH_n - f)d\sigma + \iint_D N_i\ \ grad\delta T\ d\sigma + \gamma\sum_{s=1}^{p}(T_s - T_s^{э}) + \int_{\Gamma} N_i(lH_n - \alpha)ds = 0,$$

i=1,2,...n,

где $\delta T = T - \tilde{T}$, $\tilde{T}$ – значения функции T, полученные из предыдущей итерации; $\gamma > 0$. Применяя формулу Грина и подставляя вместо T_n ее разложение (6), приходим к системе

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} T_j = d_i, \qquad i = 1,2,..., n, \tag{9}$$

где

$$c_{ij} = \iint_D N_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \vec{j} \right) d\sigma + \gamma_j,$$

$$d_i = \iint_e N_i f d\sigma - \iint_e N_i H_n Q \, d\sigma + \iint_D N_i grad \, \tilde{T}_n d\sigma + \sum_{s=1}^{q_i} \gamma_s T_s^э + \int_Г N_i (\beta H_n + \alpha) ds,$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & если \ значение \ T_s^э \ задано, \\ 0, & если \ значение \ T_s^э \ не \ задано, \qquad s = 1,2,..., p. \end{cases}$$

Для одного элемента (е) с вершинами i, j, k коэффициенты систем (8) и (9) имеют вид (считаем, что только одна сторона ij элемента (е) лежит на границе области):

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \iint_e T_e q(N_i, N_i) d\sigma + \iint_e N_i^2 Q d\sigma - \int_{(i,j)} N_i^2 \beta \, ds + \delta_i, \\
a_{ij} &= \iint_e T_e q(N_i, N_j) d\sigma + \iint_e N_i N_j Q d\sigma - \int_{(i,j)} N_i N_j \beta \, ds + \delta_j, \\
a_{ik} &= \iint_e T_e q(N_i, N_k) d\sigma + \iint_e N_i N_k Q d\sigma + \delta_k, \\
g_i &= \iint_e N_i f \, d\sigma + \int_{(i,j)} N_i \alpha \, ds + \gamma_i H_i^э + \gamma_j H_j^э + \gamma_k H_k^э, \qquad (10) \\
c_{ii} &= \iint_e N_i q(N_i, H_e) d\sigma + \iint_e N_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \vec{j} \right) d\sigma + \gamma_i, \\
c_{ij} &= \iint_e N_j q(N_i, H_e) d\sigma + \iint_e N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \vec{j} \right) d\sigma + \gamma_j, \\
c_{ik} &= \iint_e N_k q(N_i, H_e) d\sigma + \iint_e N_i \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \vec{j} \right) d\sigma + \gamma_k, \\
d_i &= \iint_e N_i f d\sigma + \int_{(i,j)} N_i (\beta H_e + \alpha) ds + \iint_e N_i grad \tilde{T}_e d\sigma + \gamma_i T_i^э + \gamma_k T_k^э.
\end{aligned}$$

В формулах (10) для сокращения записи приняты следующие обозначения:

$$H_e = H_i N_i + H_j N_j + H_k N_k, \qquad T_e = T_i N_i + T_j N_j + T_k N_k,$$

$$q(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Решив систему (9), получаем второе приближение $T^{(2)}(x,y)$ и подставляя его вместо T, снова приходим к системе (7). Решение этой системы, т.е. второе приближение функции H(x,y) используем для нахождения $T^{(3)}(x,y)$ из системы (9) и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условий

$$\max_i \left| H_i^{(\nu)} - H_i^{(\nu-1)} \right| < \varepsilon_1, \qquad \max_i \left| T_i^{(\nu)} - T_i^{(\nu-1)} \right| < \varepsilon_2,$$

где ν – номер итерации; ε_1, ε_2 – заданные малые положительные числа; i=1,2,...,n.

Наибольшую трудность в этой задаче представляет решение системы (9). Как видно из формул (10), коэффициенты этой системы мало отличаются друг от друга, вследствие чего ее матрица является почти вырожденной. Для решения такой плохо обусловленной системы необходимо применять метод сингулярного разложения матрицы (или SVD–метод) [4].

Работа алгоритма проверена на следующем тестовом примере. В круге $x^2+y^2\leq 0.25$ решается задача (3), (4) с внутренними условиями (1), (2). Круг разделен на 54 элемента, число узлов сетки – 37, из них 18– граничных. Элементами являются равносторонние треугольники со стороной, равной 0.2. Искомыми функциями являются $H(x,y)=20(x^2+y^2)+5$, $T(x,y)=10(x^2+y^2+1)$, а заданными – $Q(x,y)=0$, $f(x,y)=-800(2x^2+2y^2+1)$. Числа q и p в условиях (1) и (2) (т.е. число узлов, в которых задаются экспериментальные (точные) значения функций H и T соответственно) задавались в следующих сочетаниях: вариант I: q=p=17; вариант IIa: q=17, p=13; вариант IIb: q=13, p=17; вариант IIIa: q=13, p=7; вариант IIIb: q=7, p=13; вариант IVa: q=7, p=4; вариант IVb: q=4, p=7; вариант V: q=p=4. В связи с тем, что область фильтрации и искомые функции обладают свойством осевой и центральной симметрии, в таблицах 1–3 приведены значения искомых функций только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2, 4, 9, 15, 22 являются граничными.

В табл.1 показаны значения T(x,y), полученные при точном задании функции H(x,y) во всей области. Даже в таком почти идеальном случае получаются довольно грубые приближения искомой функции T(x,y), что свидетельствует о некорректности задачи идентификации водопроводимости.

Таблица 1

Значения функции T(x,y), полученные при точном задании функции H(x,y)

Узлы	**Точные значения**	**Приближенные значения функции, полученные при различных значениях p**			
		p=17	**p=13**	**p=7**	**p=4**
2	12.31	11.89	11.84	11.51	13.27
4	12.52	12.41	12.47	11.70	12.69
7	11.23	11.23	11.27	11.25	12.63
8	11.63	11.68	11.92	11.43	12.65
9	12.52	11.94	11.96	11.54	11.74
13	10.41	10.66	10.71	10.80	12.28
14	11.21	11.23	11.25	11.24	11.27
15	12.52	11.98	11.86	11.56	11.06
19	10.00	10.08	10.08	10.09	11.94
20	10.40	10.89	10.70	10.79	12.31
21	11.60	12.02	11.88	11.47	11.03
22	12.50	12.47	12.46	11.78	11.40
Абс. погр.		0.58	0.66	0.98	1.94
Отн. погр.		4.6%	5.3%	7.8%	19.4%

Значения функции $T(x,y)=10(x^2+y^2+1)$

Таблица 2

Узлы	***Точные значения Функции***	***Приближенные значения функции***							
		q=p=17	q=17 p=13	q=13 p=17	q=13 p=7	q=7 p=13	q=7 p=4	q=4 p=7	q=p=4
2	12.31	12.33	12.18	12.38	12.42	12.46	13.34	13.00	15.20
4	12.52	12.63	12.52	12.54	12.60	12.53	13.70	13.79	15.13
7	11.23	11.28	11.26	11.26	11.26	11.24	12.57	11.27	13.72
8	11.63	11.57	11.58	11.62	11.59	11.53	12.77	12.34	13.79
9	12.52	12.33	12.12	12.32	12.30	12.48	12.70	13.81	14.36
13	10.41	11.33	10.96	10.55	10.48	10.50	12.22	10.19	11.42
14	11.21	11.23	11.22	11.22	11.22	11.22	11.27	11.26	11.28
15	12.52	12.10	12.12	12.26	12.74	12.62	12.54	13.22	12.87
19	10.00	10.07	10.10	10.10	10.10	10.11	11.98	10.01	11.02
20	10.40	11.18	11.04	10.95	10.96	10.60	11.46	10.08	10.36
21	10.60	11.34	11.68	11.77	11.84	11.63	11.88	11.82	11.41
22	12.50	12.56	12.53	12.54	13.51	12.55	13.15	13.38	13.06
Абс. погр.		0.92	1.08	1.17	1.24	1.03	1.81	1.22	2.89
Отн. погр.		8.8 %	10.2 %	11.0 %	11.7 %	9.7 %	17.4 %	11.5 %	23.5 %

Значения функции $H(x,y)=20(x^2+y^2)+5$

Таблица 3

Узлы	***Точные значения Функции***	***Приближенные значения функции***							
		q=p=17	q=17 p=13	q=13 p=17	q=13 p=7	q=7 p=13	q=7 p=4	q=4 p=7	q=p=4
2	9.62	9.04	8.75	8.51	8.56	9.46	9.48	10.89	10.91
4	10.03	9.52	9.29	9.32	9.38	9.90	9.96	10.47	10.49
7	7.45	7.44	7.42	7.48	7.43	8.37	8.40	10.08	10.18
8	8.25	8.38	8.40	8.51	8.54	9.11	9.09	9.97	9.86
9	10.04	10.03	9.98	10.00	10.00	9.98	9.98	10.11	10.16
13	5.81	5.85	5.89	6.47	6.57	6.81	6.79	7.40	7.67
14	7.41	7.87	8.03	8.33	8.33	8.33	8.38	9.76	9.70
15	10.03	9.97	9.88	9.89	9.82	9.27	9.38	10.71	10.70
19	5.00	4.99	5.00	5.15	5.05	5.18	5.10	6.64	6.65
20	5.80	5.92	5.99	6.31	6.34	6.63	6.61	7.69	7.71
21	8.20	8.26	8.32	8.33	8.36	8.22	8.24	10.16	10.26
22	10.00	9.45	9.28	9.23	9.25	8.84	8.86	10.97	11.13
Абс. погр.		0.51	0.87	0.92	0.92	1.00	0.98	2.63	2.63
Отн. погр.		6.2 %	9.0 %	12.4 %	12.4 %	17.2 %	16.9 %	35.3 %	35.3 %

В табл. 2 даны приближенные значения функции T(x,y), полученные при различных сочетаниях параметров p и q, а в табл. 3 – соответствующие значения функции H(x,y). В таблицах наблюдается увеличение погрешностей при уменьшении чисел p и q, причем меньшая погрешность у той функции, которая представлена большим числом экспериментальных значений, т.е. подтверждается известная закономерность: чем полнее и достовернее информация об искомых функциях, тем точнее результат.

Изучение таблиц 2 и 3 подтверждает высказанное ранее [2] утверждение о малой чувствительности функции напора к изменениям коэффициента водопроводимости. В графах табл. 3, принадлежащих одному и тому же значению параметра q (q=17, q=13, q=7, q=4), значения напоров очень мало отличаются друг от друга, тогда как соответствующие значения водопроводимости отличаются значительно (на 3,3 % при q=17, на 7,7 % при q=13, на 18,5 % при q=7, на 21,7 % при q=4). Следовательно, изменения в значениях H(x,y) в большей степени зависят не от функции T(x,y), а от количества узлов сетки, где заданы экспериментальные значения напоров.

Изложенный алгоритм может применятся для идентификации параметров фильтрационного потока в реальных условиях, при этом точность получаемых результатов будет сопоставима с точностью измерений, поскольку искомые функции обладают необходимой степенью гладкости и являются слабоизменяющимися.

Литература:

1. Джаныбеков Ч.Д. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989.–183 с.
2. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Байболотов Б.А. Об одном приближенном методе идентификации течения жидкости в пористых средах. // Вестник Иссык–Кульского университета. –Каракол, №4, 2000. – С. 94–99.
3. Сегерлинд Л. Применения метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979.– 392 с.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир, 1980.– 279 с.