

УДК 517:519.1

С. Искандаров

**ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА
ПОЛУОСИ**

Установлены некоторые достаточные условия асимптотического представления решений и их ограниченности на полуинтервале $[t_0, +\infty)$ некоторых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

Все фигурирующие в работе функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0; J = [t_0, \infty]$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение, ИУ – интегральное уравнение.

Методом весовых и срезающих функций [1-4] с использованием неравенства Коши-Буняковского устанавливаются достаточные признаки асимптотического представления, ограниченности на полуинтервале J , стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному закону, при $t \rightarrow \infty$, принадлежности пространству $L^p(J, R)$ ($p > 0$) решений, ограниченности интеграла от t_0 до t от решений линейного ИДУ первого порядка:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

ограниченности на J решений, принадлежности пространствам $L^m(J, R)$ ($m=1, 2$) первых производных решений линейного ИДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной в интегральном члене:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x'(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \quad (2)$$

ограниченности на J решений и их первых производных, стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$, принадлежности $L^p(J, R)$ ($p > 0$) первых производных решений линейного ИДУ второго порядка:

$$x''(t) + v(t)x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x'(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \quad (3)$$

принадлежности пространствам $L^m(J, R)$ ($m=1, 2$) решения и ограниченности интеграла от t_0 до t от решения линейного ИУ второго рода:

$$x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x'(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

в случае, когда ядро $K(t, \tau)$ может быть отрицательной и немалой, в том числе сильно растущей, что достигается условием, связывающим ядра $K(t, \tau)$ с функцией $a(t)$ для ИДУ (1), $v(t)$ для ИДУ (3) и с некоторой положительной весовой функцией $\varphi(t)$ для ИДУ (2), ИУ (4). При этом в случае ИУ (4) исследование ведется в той же постановке, что и в [3], т.е. без предположения, что

$$f(t) \in L^m(J, R) (m=1, 2), \quad \int_{t_0}^t f(s)ds = 0(1).$$

Отметим, что случай $0 < K(t, \tau)$ – немалая ранее рассмотрен для ИДУ (1), (3) в [1], для ИДУ (2) в [2]. Условия этих работ и настоящей работы отличаются друг от друга. Для ИУ (4) этот случай изучается впервые в настоящей работе.

Введем предположения и обозначения [1-4]: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция,

$$K(t, \tau) = \sum_{i=0}^n K_i(t, \tau), \quad f(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t),$$

$\psi_i(t)$ ($i = 0..n$) - некоторые срезающие функции,

$$R_i(t, \tau) = \varphi(t) K_i(t, \tau) (\psi_i(t) \psi_i(\tau))^{-1} \quad (i = 0..n), \quad E_i(t) = \varphi(t) f_i(t) (\psi_i(t))^{-1} \quad (i = 1..n)$$

$$R_i(t, t_0) = M_i(t) + T_i(t) \quad (i = 1..n), \quad (R)C_i(t) \quad (i = 1..n) - \text{некоторые функции.}$$

Будем говорить, что выполняется условие (А), если:

$$M_i(t) \geq 0, \quad T_i(t) \geq 0, \quad R_{ir}(t, \tau) \geq 0, \quad \text{существуют функции } \nu_i(t) \in L_1(J, R_+)$$

$$c_i(t), w_i(t) \in L_1(J, R_+) \text{ такие, что } M_i \leq \nu_i(t) M_i(t), \quad (E_i^{(k)}(t))^2 \leq T_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t),$$

$$R_{ir}''(t, \tau) \leq w_i(t) R_{ir}'(t, \tau), \quad (i = 1..n; k = 0, 1) \text{ условие (В), если: } R_{0r}'(t, \tau) \geq 0, \quad R_{0r}''(t, \tau) \leq 0.$$

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ умножаем ИДУ (1) на $\varphi(t)x(t)$, затем интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условия (К), (f), функции $R_i(t, \tau)$ ($i = 0..n$), $E_i(t)$, $C_i(t)$ ($i = 1..n$), аналогично как в [1] получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} V(t; x) &\equiv R_0(t, t_0) (X_0(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t R_{0s}'(s, t_0) (X_0(s, t_0))^2 ds + \\ &\int_{t_0}^t R_{0r}'(t, \tau) (X_0(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{0sr}''(s, \tau) (X_0(s, \tau))^2 d\tau ds + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ M_i(t) (X_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t M_i(s) (X_i(s, t_0))^2 ds + T_i(t) (X_i(t, t_0))^2 - \right. \\ &- 2 E_i(t) X_i(t, t_0) + C_i(t) - \int_{t_0}^t [T_i(s) (X_i(s, t_0))^2 ds - 2 E_i(s) X_i(s, t_0) + C_i(s)] ds + \\ &+ \int_{t_0}^t R_{ir}'(t, \tau) (X_i(t, \tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_{isr}''(s, \tau) (X_i(s, \tau))^2 d\tau ds \Big\} \equiv C_* - \varphi(t) (x(t))^2 - \\ &- 2 \int_{t_0}^t \Delta(s) x(s) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \Delta(t) \equiv a(t)\varphi(t) - \varphi'(t)/2, \quad X_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(s) x(s) ds \quad (i = 0..n), \quad C_* = \varphi(t_0) (x(t_0))^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n C_i(t_0)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

- 1) $\varphi(t) > 0$, выполняются условия (K), (f), (R), (A), (B);
- 2) $\Delta(t) \geq \Delta_0 > 0$;

$$3) R_0(t, t_0) \leq 0, \quad |R_0(t, t_0)| \leq R_{00} < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{(\psi_0(s))^2}{\Delta(s)} ds \leq \frac{\Delta_0}{R_{00}}.$$

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) справедливы асимптотическое представление

$$x(t) = (\varphi(t))^{-1/2} O(1) \quad (6)$$

и соотношения

$$\Delta(t)(x(t))^2 \in L^1(J, R_+), \quad (R_i(t, t_0)(X_i(t, t_0)))^2 = O(1) \quad (i = 1..n) \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$(X_0(t, t_0))^2 = \left(\int_{t_0}^t \frac{\psi_0(s)}{\sqrt{\Delta(s)}} \sqrt{\Delta(s)x(s)} ds \right)^2 \leq \left(\int_{t_0}^t \frac{(\psi_0(s))^2}{\Delta(s)} ds \right) \left(\int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds \right) \quad (8)$$

С учетом соотношения (8), условий 1)-3) из тождества (5) получаем

$$u(t) \equiv \varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds + \left[\Delta_0 - R_{00} \int_{t_0}^t \frac{(\psi_0(s))^2}{\Delta(s)} ds \right] \int_{t_0}^t \Delta(s)(x(s))^2 ds + \\ + \sum_{i=1}^n R_i(t, t_0)(X_i(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t R_{ir}(t, \tau)(X_i(t, \tau))^2 d\tau \leq c + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t [V_i(s) + W_i(s)] \mu(s) ds. \quad (9)$$

Применяя к неравенству (9) лемму Гронуолла-Беллмана и учитывая условия $\varphi(t) > 0$, (A), 3), имеем (6), (7).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $a(t) \geq a_0 > 0$, $K(t, t_0) < 0$, $|K(t, t_0)| \leq K_0 < \infty$, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{a(s)} \leq \frac{a_0}{K_{*0}}$

$K_i(t, t_0) \geq 0$, $K_r(t, t_0) \geq 0$, $K_{ir}''(t, t_0) \geq 0$, то все решения $x(t)$ ИДУ

$$x(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq t_0 \quad (10)$$

ограничены на полуинтервале J и принадлежат пространствам $L^m(J, R)$ ($i = 1, 2$).

В данном случае в теореме 1 $\varphi(t) \equiv 1$, $K_i(t, \tau) \equiv f_i(t) \equiv c_i(t) \equiv 0$ ($i = 1..n$), $\psi_0(t) \equiv 1$, $R_0(t, \tau) \equiv K(t, \tau)$, $\Delta(t) \equiv a(t)$. Из $2|x(t)| \leq a(t)(x(t))^2 + (a(t))^{-1}$ следует $x(t) \in L^1(J, R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу условия 2) теоремы 1 из первого соотношения (7) вытекает, что для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) $x(t) \in L^1(J, R)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются условия теоремы 1 и $(\Delta(t))^{-1} \in L^1(J, R \setminus \{0\})$, то любое решение ИДУ (1) $x(t) \in L^1(J, R)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполняются условия теоремы 1 и $\varphi(t) \geq \varphi_0 > 0$ (соответственно $(\varphi(t))^{-1/2} \in L^p(J, R \setminus \{0\})$ ($p > 0$)), то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) $x(t) = O(1)$ (соответственно $x(t) \in L^p(J, R)$ ($p > 0$)).

Это следует из соотношения (6).

СЛЕДСТВИЕ 4. Если выполняются условия теоремы 1 и $\varphi(t) \rightarrow \infty$ (соответственно существует $\text{const } a > 0$ такая, что $(\varphi(t))^{-1/2} = e^{-at} O(1)$) при $t \rightarrow \infty$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) $x(t) \rightarrow \infty$ (соответственно $x(t) = e^{-at} O(1)$) при $t \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Исходя из второго соотношения (7), с применением лемм об интегральных неравенствах первого рода [5, 6], можно установить различные признаки об ограниченности интеграла (в пределах от t_0 до t) от любого решения ИДУ (1). Приведем одну из них.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если выполняются условия теоремы 1; 2) для некоторого $j = \{1, \dots, n\}$ $R_j(t, t_0) > 0$, $R'_{jt}(t, t_0) \leq 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \geq 0$, $(\psi_j(t))^{-1} (R_j(s, t_0))^{3/2} R'_{jt}(t, t_0) \in L^1(J, R)$, то интеграл (в пределах от t_0 до t) от любого решения $x(t)$ ИДУ (1) ограничен на J .

Это следствие устанавливается на основе второго соотношения (7) с применением леммы 3 [5].

ПРИМЕР. ИДУ

$$x'(t) + e^{3t} x(t) - \int_0^t (t-\tau+1)(t-\tau+2)^{-1} e^{t+\tau} x(\tau) d\tau = 0, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет условиям следствия 3, гарантирующим ограниченность решений этого ИДУ. Здесь

$$\varphi(t) \equiv 1, K_i(t, \tau) \equiv f_i(t) \equiv c_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1..n), \varphi_0(t) \equiv e^t, R_0(t, \tau) \equiv (t-\tau+1)(t-\tau+2)^{-1}, \\ R_{00} = 1, \Delta(t) \equiv e^{3t}, \Delta_0 = 1, \int_0^\infty (\Delta(s))^{-1} (\psi(s))^2 ds = 1.$$

Для этого примера выполняется также условие $(\Delta(t)) = e^{-3t} \in L^p(J, R_+ \setminus \{0\})$. Таким образом, любое решение $x(t)$ ИДУ примера 1 принадлежит пространствам $L_m(J, R)$ ($m=1, 2$).

В случае ИДУ (2) аналогично [2] умножаем на $\varphi(t)x'(t)$ и для произвольно фиксированного решения $x(t)$ получаем тождество:

$$V(t; x) \equiv c_{..} - 2 \int_{t_0}^t \varphi(s) (x'(s))^2 ds - \varphi(t) a(t) (x(t))^2 + \int_{t_0}^t (\varphi(s) a(s)) (x(s))^2 ds, \quad (10)$$

$$\text{где } c_{..} = \varphi(t_0) a(t_0) (x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0)$$

Аналогично теореме 1, исходя из тождества, устанавливаются

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) выполняется условие 1) теоремы 1; 2) $\varphi(t) \geq \varphi_0 > 0$;

$$3) R_0(t, t_0) \leq 0, |R_0(t, t_0)| \leq R_{00} < \infty, \int_{t_0}^\infty \frac{(\psi_0(s))^2 ds}{\varphi(s)} \leq \frac{\varphi_0}{R_{00}}; 4) a(t) = a_1(t) + a_2(t),$$

$a_1(t) > 0$, $(\varphi(t) a_1(t))' \geq 0$, $a_2(t) \geq 0$, существует функция $a_2^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $(\varphi(t) a_2(t))' \leq a_2^*(t) \varphi(t) a(t)$. Тогда все решения ИДУ (2) ограничены на

полуинтервале J и первые производные всех его решений принадлежат пространству $L^2(J, R)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия 1)-3) теоремы 2; $a(t) \geq 0$, существует функция $\dot{a}(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $(\varphi(t)a(t))' \leq \dot{a}(t)\varphi(t)a(t)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (2) выполняются соотношения

$$\varphi(t)(x'(t))^2 \in L^1(J, R_+), R_i(t, t_0) \left(\int_{t_0}^t \psi_i(s) x'(s) ds \right)^2 = O(1) \quad (i = 1..n).$$

Аналогично следствию 2 имеет место

СЛЕДСТВИЕ 6. Если 1) выполняются условия теоремы 3; 2) $(\varphi(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (2) $x'(t) \in L^1(J, R)$ и $x(t) < \infty$.

Аналогом следствия 5 является

СЛЕДСТВИЕ 7. Если выполняются условия теоремы 3 и выполняется условие 2) следствия 5, то любое решение ИДУ (2) ограничено на J .

Поступая аналогично [1], умножая на $\varphi(t)x'(t)$, для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (3) приходим к тождеству:

$$V(t; x) \equiv c_{\dots} - \varphi(t)(x'(t))^2 - 2 \int_{t_0}^t D(s)(x'(s))^2 ds - \varphi(t)a(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t (\varphi(s)a(s))(x(s))^2 ds, \\ (11) \text{ где } c_{\dots} = \varphi(t_0)(x'(t_0))^2 + \varphi(t_0)a(t_0)(x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0), D(t) \equiv \varphi(t)\varphi'(t) - \dot{\varphi}(t)/2.$$

Аналогично теореме 1, исходя из тождества (11), доказываются

ТЕОРЕМА 4. Пусть 1) выполняется условие 1) теоремы 1; 2) $D(t) \geq D_0 > 0$; $R_0(t, t_0) < 0$, $|R_0(t, t_0)| \leq R_{00} < \infty$, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{(\psi_0(s))^2}{D(s)} ds \leq \frac{D_0}{R_{00}}$; 4) выполняется

условие 4) теоремы 2. Тогда все решения ИДУ (3) ограничены на полуинтервале J и первые производные всех решений этого ИДУ принадлежат пространству $L^2(J, R)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия 1)-3) теоремы 4 и условие 2) теоремы 3. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (3) справедливы соотношения

$$x'(t) = (\varphi(t))^{-1/2} O(1), D(t)(x'(t))^2 \in L^1 \left(J, R_+ \right), R_i(t, t_0) \left(\int_{t_0}^t \varphi_i(s) x'(s) ds \right)^2 = \\ = O(1) \quad (i = 1..n) \quad (12)$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Если 1)

$$a(t) > 0, \dot{a}(t) \geq 0; 2) \varphi(t) \geq \varphi_0 > 0, K(t, t_0) < 0, |K(t, t_0)| \leq K_0 < \infty, \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{a_0}{K_0}, K_i(t, t_0) \geq 0,$$

$K_i'(t, \tau) \geq 0, K_{i\tau}''(t, \tau) \geq 0$, то все решения $x(t)$ ИДУ (3) (в (3) $f(t) \equiv 0$) ограничены на полуинтервале J и $x'(t) \in L^m(J, R)$ ($i = 1, 2$).

СЛЕДСТВИЕ 9. Если выполняется условие 2) следствия 8 и $a(t) \geq a_0 > 0$, $a'(t) \leq 0$, то все решения $x(t)$ и их первые производные ИДУ (3₀) ограничены на J и $x'(t) \in L^m(J, R)$ ($i = 1, 2$)

Следствия 8, 9 являются аналогами следствия 1.

Из первого соотношения (12) аналогично следствиям 3, 4 вытекают

СЛЕДСТВИЕ 10. Если выполняются условия теоремы 5 и $\varphi(t) \geq \varphi_0 > 0$, (соответственно $(\varphi(t))^{-1/2} \in L^p(J, R_+ \setminus \{0\})$, ($p > 0$)) то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3) $x'(t) = O(1)$ (соответственно $x'(t) \in L^p(J, R)$ ($p > 0$)).

СЛЕДСТВИЕ 11. Если выполняются условия теоремы 5 и $\varphi(t) \rightarrow \infty$ (соответственно $(\varphi(t))^{-1/2} = e^{-at} O(1)$, $a = \text{const} > 0$) при $t \rightarrow \infty$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3) $x(t) \rightarrow 0$ (соответственно $x(t) = e^{-at} O(1)$ при $t \rightarrow \infty$).

Из второго соотношения (12) следует

СЛЕДСТВИЕ 12. Если выполняются условия теоремы 5 и $(D(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3) $x \in L^1(J, R)$ и $x(\infty) < \infty$. Исходя из третьего соотношения, устанавливается аналог следствия 5:

СЛЕДСТВИЕ 13. Если выполняются условие теоремы 5 и условие 2) следствия 5), то любое решение ИДУ (3) ограничено на J .

Аналогично [3] умножаем ИУ (4) на $\varphi(t)x(t)$, после аналогичных преобразований, как в случае ИДУ (1), так и из [3], получаем тождество:

$$V(t; x) \equiv C_{\dots} - 2 \int_{t_0}^t \varphi(s) (x(s))^2 ds, \quad (13)$$

$$\text{где } C_{\dots} = \sum_{i=1}^n C_i(t_0)$$

Аналогично теореме 1 справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия 1)-3) теоремы 2. Тогда решение $x(t)$ ИУ (4) принадлежит пространству $L^2(J, R)$ и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi(t) (x(t))^2 \in L^1(J, R_+), \quad R_i(t, t_0) \left(\int_{t_0}^t \psi_i(s) x(s) ds \right)^2 = O(1) \quad (i = 1..n). \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 14. Если выполняются условия теоремы 6 и условие 2) следствия 6, то решение ИУ (4) $x(t) \in L^1(J, R)$.

СЛЕДСТВИЕ 15. Если выполняются условия теоремы 6 и условие 2) следствия 5, то интеграл (в пределах от t_0 до t) от решения ИУ (4) ограничен на J .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в условиях теорем 1, 2, 4, 6 срезывающая функция $\varphi_0(t) = O(1)$, то любое решение ИДУ (1) $x(t) \in L^1(J, R)$, для любого решения ИДУ (3), (4) $x'(t) \in L^1(J, R)$, решение ИУ (4) $x(t) \in L^1(J, R)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При выполнении требований условия (А) относительно $M_i(t)$ все функции $M_i(t)$ ($i=1..n$) являются ограниченными. Аналогично [7] можно изучить случай, когда одна из этих функций $M_i(t)$ может быть неограниченной на J .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Используя метод матричных весовых и срезающих функций [8] можно установить аналоги результатов настоящей работы для вольтеровых систем ИДУ видов (1)-(3) и вольтеровых систем ИУ вида (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтера. Неограниченность решений однородных линейных уравнений первого порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. –Вып.13. –С.149-184.
2. Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтера, неразрешенных относительно производной //Там же. –С.185-192.
3. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству $L^2(t_0, \infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтера //Там же. –С.193-198.
4. Искандаров С. Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтера //Там же. –Фрунзе: Илим, 1984. –Вып.17. –С.161-165.
5. Искандаров С. Леммы об интегральных неравенствах первого рода и их применения //Мат-лы 3-й научно-теор. конф. «Проблемы развития суверенного Кыргызстана». Сер. мат. и физ. –Бишкек: Чуйский ун-т, 1997. –С.57-62.
6. Искандаров С. Леммы об интегральных неравенствах первого рода и их применения к вольтеровым системам интегро-дифференциальных и интегральных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. –Вып.26. –С.58-74.
7. Искандаров С. Об одном интегральном неравенстве первого рода и его применении к исследованию асимптотики решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтера //Там же. – Фрунзе: Илим, 1984. –Вып.17. –С.352-362.
8. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезающих функций в асимптотической теории вольтеровых систем на полуоси //Вестн. Кыргызского гос. нац. ун-та. Сер. естественно-техн. науки. –Бишкек, 1995. – Вып.1. –Ч.1. –С.163-171.