УДК 05.13.16

М.У. Мурзакматов, Ж. Мамыров, Э.Э. Маданбекова

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

Приводится алгоритм численного решения одномерного уравнения Буссинеска при краевых условиях I, II, III рода с учетом инфильтрации и испарения. Работа алгоритма проверяется на решении тестовой задачи о промывках.

Во многих случаях течение грунтовых вод можно считать одномерным, например, течение к рекам или водоемам в межгорных впадинах; течение к скважинам; течение к горизонтальным дренам при проведении промывок и т.д. Различные прогнозные задачи мелиоративной гидрогеологии в таких случаях сводятся к решению одномерного уравнения Буссинеска

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+W(x,t)-U(x,t;H),\qquad 0<x<L,\ t>0 \qquad (1)$$

с начальным

$$H(x,0)=f(x),\qquad 0<x<L \qquad (2)$$

и краевыми

$$\gamma_1 k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}-\gamma_2 AH=-\gamma_3 B,\qquad x\in\Gamma,\quad t>0 \qquad (3)$$

условиями, где Г- граница области, т.е. множество точек, где имеются возмущающие факторы. Сюда относятся также точки $x=0$ и $x=L$; γ_1, γ_2, и γ_3 - числа, равные нулю или единице; A - параметр, характеризующий несовершенство дрены, значение которого определяется по режимным наблюдениям или вычисляется по экспериментальным формулам; $H_{\partial p}$ - уровень воды в дрене. При $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1$ имеем условие в несовершенной дрене; при $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\gamma_3=1$ - условие I рода, а при $\gamma_1=\gamma_3=1$, $\gamma_2=0$ - условие II рода.

Функция $U(x,t;H)$ выражает закон испарения с поверхности грунтовых вод по М.М. Крылову-С.Ф. Аверьянову:

$$U(x,t,H)=\begin{cases} U_0\left(1-\dfrac{Z-H}{Z_{кр}}\right)^{P_0} & \text{при } Z-H<Z_{кр}, \\ 0 & \text{при } Z-H\geq Z_{кр} \end{cases} \qquad (4)$$

В задаче (1) -(4) приняты следующие обозначения:

$H(x,t)$ - уровень грунтовых вод (у.г.в) в точке x в момент времени t(м); $k(x)$- коэффициент фильтрации (к.ф.) (м/сут); $b(x)$- отметка водоупора (м); $\mu(x)$ - коэффициент водоотдачи или недостатка насыщения; $W(x,t)$- инфильтрация (м/сут); $U_0(t)$ - испарение со свободной поверхности (м/сут); $Z(x)$- отметка поверхности земли (м); $Z_{кр}(t)$- критическая глубина, ниже которой испарение не происходит (м); $P_0(t)$- показатель степени $(1\leq P_0\leq 3)$; $f(x)$ - начальные у.г.в. (м); L- длина области фильтрации (м); x - пространственная, t- временная координаты.

Задача решается вариационно-разностным методом [1,2] с применением квазилинеаризации к нелинейным членам уравнения.

Она сводится к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$a_iH_{i-1}-c_iH_i+b_iH_{i+1}+d_i=0, \qquad i=1,2,\dots,n-1, \qquad (5)$$

где

$$a_i=\frac{1}{2h_{i-1}}[k_{i-1}(\tilde{H}_{i-1}-b_{i-1})+k_i(\tilde{H}_i-b_i)],$$

$$b_i=\frac{1}{2h_i}[k_i(\tilde{H}_i-b_i)+k_{i+1}(\tilde{H}_{i+1}-b_{i+1})], \qquad (6)$$

$$c_i=a_i+b_i+\frac{h_{i-1}+h_i}{2}\left[\frac{\mu_i}{\Delta t}+\frac{U_0P_0}{Z_{кр}}\left(1-\frac{Z_i-\tilde{H}_i}{Z_{кр}}\right)^{P_0-1}\right]+A_i,$$

$$d_i=\frac{h_{i-1}+h_i}{2}\left[W_i+\frac{\mu_i}{\Delta t}\check{H}_i-U_0\left(1-\frac{Z_i-\tilde{H}_i}{Z_{кр}}\right)^{P_0-1}\left(1-\frac{Z_i-\tilde{H}_i}{Z_{кр}}-\frac{P_0\tilde{H}_i}{Z_{кр}}\right)\right]+B_i$$

Через $\tilde{H}$ обозначено значение искомой функции из предыдущего приближения, через $\check{H}$ - ее значение на предыдущем временном слое, т.е. $\check{H}_i=H(x_i, t_{k-1})$.

Система (5) решается методом прогонки. Решение системы ищется в виде

$$H_i=H_{i+1}\,\alpha_i+\beta_i, \qquad i=0,1,\dots,n-1 \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получаем рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов

$$\alpha_i=\frac{b_i}{c_i-a_i\alpha_{i-1}}, \qquad \beta_i=\frac{\alpha_i\beta_{i-1}+d_i}{c_i-a_i\alpha_{i-1}}, \qquad i=1,2,\dots,n-1 \quad (8)$$

α_0, β_0 и H_n находятся из краевых условий и системы (5) при $i=1$ и $i=n-1$:

$$\alpha_0=\frac{b_0}{c_0},\ \beta_0=\frac{d_0}{c_0}, \qquad (9)$$

$$H_n=\frac{a_n\beta_{n-1}+d_n}{c_n-a_n\alpha_{n-1}}, \qquad (10)$$

Коэффициенты b_0, c_0, d_0, a_n, c_n, d_n вычисляются по формулам (6) при $i=0$ и $i=n$ (здесь следует положить $d_0=0$, $b_n=0$).

Порядок счета следующий. По формулам (9) определяются α_0 и β_0. Затем по формулам (8) вычисляются прогоночные коэффициенты α_i и β_i, $i=1,2,\dots,n-1$ (прямая прогонка). Далее, по формуле (10) находится H_n и по известным значениям α_i и β_i с помощью формулы (7) вычисляются H_i, $i=n-1,n-2,\dots,1,0$ (обратная прогонка).

Полученные значения H_i подставляются вместо $\bar{H}_i$ в формулы (6) и вся процедура повторяется снова. Процесс продолжается до выполнения условия

$$\max| H_i^{(s+1)} - H_i^{(s)} | \le \varepsilon ,$$

где s означает номер итерации, ε - заданная точность вычислений.

Вычисленные таким образом значения $H_i^{(s)}$ являются приближенным решением задачи на k- ом временном слое. Затем, используя полученное решение в качестве начального условия, совершается переход на следующий временной слой. Первым приближением искомой функции $\bar{H}_i$ берется ее значение на предыдущем временном слое, т.е. начальное условие $\check{H}_i$.

Рассмотрим следующую тестовую задачу о промывке (см. рис. 1).

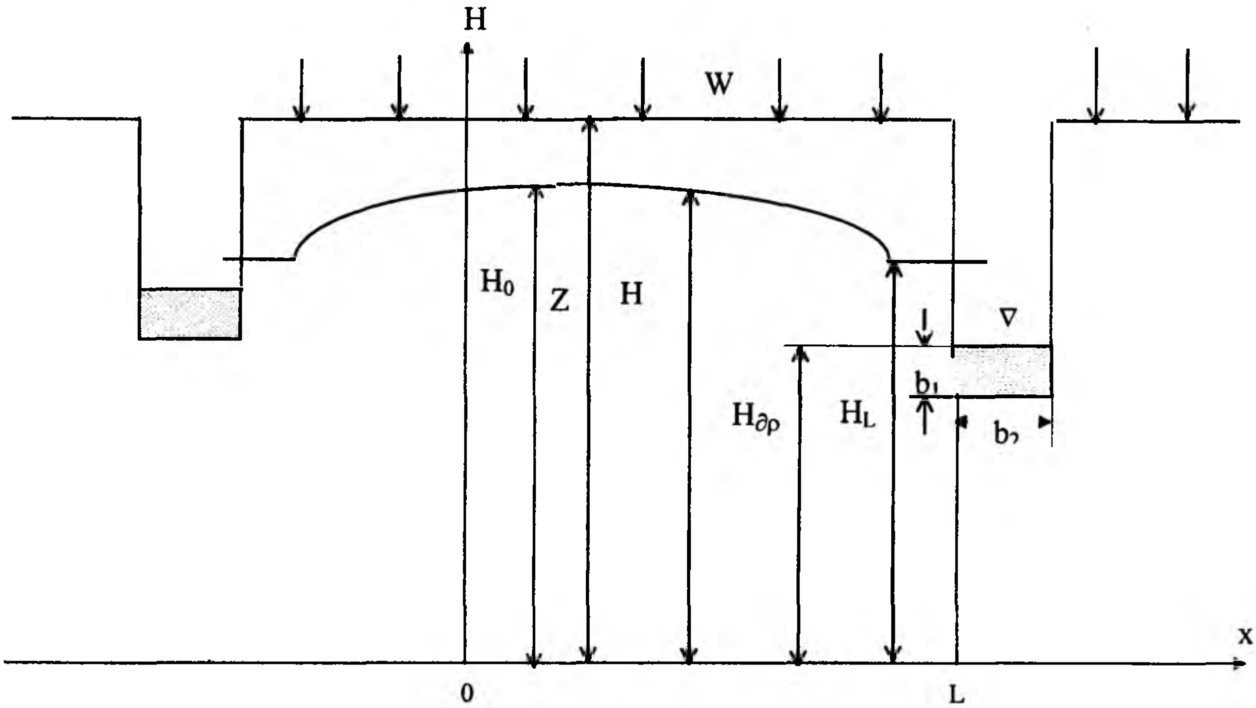

Рис.1. Схематическое изображение области фильтрации.

На бесконечную полосу шириной 2L=300 м подается инфильтрация с интенсивностью W=0,0133 м/сут. Среда однородная, имеет следующие физические и геометрические параметры: к.ф. k=3 м/сут; водоотдача μ=0,1; водоупор горизонтальный (b=0 м); поверхность земли также горизонтальная, ее отметка Z=103 м. Начальный У.Г.В. находится на отметке 100 м.

На границах полосы устроены горизонтальные дрены глубиной 3 м и шириной по дну b_2=0,5 м . Будем считать, что в дрене образуется слой воды глубиной b_1=0,25 м.

Требуется определить предельное (установившееся) положение у.г.в. при отсутствии испарения (считаем U_0=0; $Z_{кр}$=3 м ; P_0=1,5).

Поскольку полоса бесконечна, движение грунтовых вод строго одномерно (от центра к краям) и ввиду симметричности движения достаточно рассмотреть его на отрезке (0,L). Краевые условия при этом имеют вид:

$$k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \qquad x=0,$$

$$k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x} - AH = -B \quad \text{при} \quad x=L$$

Определим параметры A и B. Из [3] [с.102;109] имеем

$$A=\frac{km}{\Phi_{H.g}}, \qquad B=A\,H_{gp},$$

где $\Phi_{H.g}=m_g f_{H.g}=0{,}73\, m_g \lg \frac{2m_g}{\Pi d}$

выражает сопротивление несовершенной дрены;

$d=\eta\,(b_1+0{,}5\, b_2)$ - диаметр дрены.

Поправочный коэффициет η находится по соотношению b_1 и b_2. В данном случае $2b_1/b_2=1$, поэтому $\eta=1{,}18$; m_g означает мощность пласта в области дрены. Мы имеем $m_g=100$ м.

Получаем

$\Phi_{H.g}\approx 148{,}44$; $A\approx 2{,}02$; $B\approx 202{,}5$.

Сетка по x неравномерна: ближе к дрене она гуще.

Задачу решаем на 6 месяцев с шагом $\Delta t=30$ сут. В результате получаем $H_0=101{,}73$ м ; $H_L=101{,}24$ м.

Полученный результат можно проверить с помощью расчетных формул [3. с.102-108].

$$H_0=\sqrt{H_g^2+\frac{WL}{k}+(L+2\Phi_{H_*})}\approx 101{,}72\text{м};$$

$$H_L=\sqrt{H_{L^2}+\frac{WL^2}{k}}\approx 101{,}23\text{м}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Вариационно-разностный метод решения задач подземной фильтрации //ВИНИТИ АН СССР. -№182-74 Деп. –1974. -77с.
2. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. - Фрунзе: Илим, 1982.
3. Шестаков В.М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. -М.: МГУ, 1965. -233с.