

УДК 05.13.16

М.У. Мурзакматов, Ж.М. Мамыров

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ВОДОНОСНОМ ГОРИЗОНТЕ

Рассматривается применение метода регуляризации к идентификации коэффициента фильтрации путем численного решения обратной задачи для одномерного уравнения Буссинеска.

Коэффициент фильтрации является одним из основных параметров, характеризующих водоносные пласты. Для проведения гидрогеологических расчетов необходимо располагать некоторыми осредненными его значениями или должны быть известны хотя бы пределы его изменения в рассматриваемой области. Определение

этого параметра опытно-фильтрационными методами сопряжено с большими материальными затратами. В данной работе рассматривается метод идентификации коэффициента фильтрации расчетным путем по известным значениям уровня грунтовых вод. В рамках принятой схематизации гидрогеологических условий предлагаемый метод имеет ряд преимуществ перед другими.

Задача идентификации коэффициента фильтрации в неоднородной среде сводится к решению обратной задачи для уравнения Буссинеска. При этом будем считать значения уровня грунтовых вод и водопроницаемости в некоторых точках заданными, а все остальные функции, входящие в математическую модель, - известными. Поскольку значения грунтовых вод задаются с определенной погрешностью, то задача нахождения коэффициента уравнения является некорректной, поэтому для ее решения применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [1]. В одномерном случае задача сводится к нахождению функции $T(x)$, сообщающей на отрезке $[a, b]$ минимум функционалу

$$\Phi(T) = \sum_{j=1}^q \left((H_0(T) - H_{0j}^3) \right)^2 + \sum_{i=1}^p \left(T_1 - T_1^3 \right)^2 + \alpha | \delta T |^2, \quad (1)$$

где

$$T(x) = K(x)[H(x) - b(x)] \text{ - водопроницаемость,} \quad (2)$$

$K(x)$ - коэффициент фильтрации (искомая функция),

H^3 и T^3 - заданные экспериментальные значения функций $H(x)$ и $T(x)$,

p и q - число точек, где заданы H^3 и T^3 соответственно,

$H(x)$ - расчетные значения уровней грунтовых вод, которые находятся как решение задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(T \frac{dH}{dx} \right) + Q(x)H = f(x), \quad a < x < b, \quad (3)$$

$$-T \frac{dH}{dx} + A_0 H = B_0, \quad x = a,$$

$$T \frac{dH}{dx} + A_n H = B_n, \quad x = b,$$

α - параметр регуляризации, $f(x)$, $Q(x)$, $b(x)$ - известные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции.

В качестве H^3 и T^3 берутся значения, определенные опытным путем в некоторых точках. После нахождения функции $T(x)$ искомая функция $K(x)$ определяется по формуле (2).

При каждом наборе значений функции T получаем вполне определенные значения функции $H(x)$, т.е. имеем оператор $H(T)$, в общем случае нелинейный. Линеаризуем его следующим образом

$$H(T) = H(\tilde{T}) + \sum_{j=0}^n (T_j - \tilde{T}_j) \frac{\partial H(T)}{\partial T_j} + R_2(T), \quad (4)$$

где T_j - значение функции $T(x)$ в точке x_j , полученное в предыдущей итерации; n - число точек деления отрезка $[a, b]$.

Подставляя (4) в (1) и используя необходимое условие минимума функции, получаем

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial T_i} = \sum_{s=1}^q \left[\tilde{H}_s + \sum_{j=1}^B (T_j - \tilde{T}_j) \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial T_j} - H_s \right] \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial T_i} + \gamma (T_i - T_i^0) + \alpha (T_i - \tilde{T}_i) = 0, \quad i=1, n \quad (5)$$

Производные, входящие в уравнение (5), заменяем разностными отношениями

$$\frac{\partial H}{\partial T} \approx \frac{\Delta H}{\Delta T} = \frac{H^{v+1} - H^v}{T^{v+1} - T^v},$$

здесь v - номер итерации.

Получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными T_j :

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} T_j = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

$$\text{где } a_{ij} = \sum_{s=1}^q \frac{\Delta \tilde{H}_s}{\Delta T_j} \frac{\Delta \tilde{H}_s}{\Delta T_i} \quad \text{при } i \neq j;$$

$$a_{ii} = \sum_{s=1}^q \frac{\left(\frac{\Delta \tilde{H}_s}{\Delta T_i} \right)^2}{\Delta T_i} + \alpha + \gamma,$$

$$b_i = \sum_{s=1}^q \left[H_s - \tilde{H}_s + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \tilde{H}_s}{\Delta T_j} T_j \right] \frac{\Delta \tilde{H}_s}{\Delta T_i} + \gamma T_i^0 + \alpha \tilde{T}_i,$$

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } T_i^0 \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } T_i^0 \text{ не задано.} \end{cases}$$

Матрица системы является симметричной, имеет диагональное преобладание, поэтому ее можно решить методом квадратных корней. Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке.

Используя заданные значения H^0 и T^0 в качестве нулевого приближения, решается задача (3) [2,3] и определяется первое приближение $\tilde{H}_i^1$ (т.е. $v=1$). Экспериментальные значения H^0 могут задаваться во всех или нескольких узлах. Значения K^0 могут быть вообще неизвестными, тогда начальное приближение для функции $K(x)$ задается произвольно (в разумных пределах, например, $0 < K^0 \leq 100$ м/сут). Затем, придавая приращение ΔK функции $K(x)$, находим второе приближение $\tilde{H}^2$ ($v=2$). Это дает возможность определить производные $\partial \tilde{H} / \partial T$ и решить систему (6) при некотором значении параметра регуляризации α . Итерация по v проводится до установления фильтрационного процесса. Если при этом полученные значения уровней грунтовых вод в пределах ошибок не совпадут с данными экспериментальных значений H^0 , то итерация проводится по параметру α . При новом значении α начинается новый виток итерации по v . Процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_s \left| H_s^q - H_s^p \right| \leq \varepsilon, \quad s = \overline{1, q}.$$

Алгоритм проверялся на тестовой задаче со следующими данными:

$$H(x) = (350^2 + 10^{-4}(L^2 - x^2))^{1/2},$$

$$K(x) = 10(5 + 4 \sin \frac{2\pi x}{L}),$$

$$b(x) = 0, Q(x) = 4 \cdot 10^{-3}, 0 \leq x \leq L,$$

$$L = 12 \cdot 10^3 \text{ м}, h = 10^3 \text{ м}, n = 12.$$

Краевая задача (3) решалась при условиях III рода. Экспериментальные (точные) значения H^q, K^p задавались соответственно в q и p точках ($q=4,7,13$; $p=0,1,3$), начальное приближение для функции $K(x)$ задавалось равным 1 м/сут, 10 м/сут и 100 м/сут, а для функции $H(x)$ - 0 и 350 м.

Результаты численных экспериментов показывают, что итерационный процесс сходится независимо от начальных приближений функций H и K и параметра α . В точности получаемых результатов существенную роль играет информация по уровням грунтовых вод, а влияние значений искомой функции сказывается только в тех узлах, где они заданы (если $p=3$, то значение K^p задаются на концах и в середине отрезка, а при $p=1$ - только в середине). Эту закономерность можно наблюдать в таблице 1.

Таблица 1

Значения искомой функции в узлах сетки, м/сут

Варианты х, км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Точные значения	50.0	70.0	84.6	90.0	84.6	70.0	50.0	30.0	15.4	10.0	15.4	30.0	50.0
q=13, p=3	49.8	56.8	89.1	88.5	86.7	69.7	50.6	27.8	14.3	6.7	14.3	27.6	50.6
q=13, p=1	57.3	58.7	87.7	88.7	87.2	68.8	51.6	26.8	15.4	5.8	15.3	26.6	51.6
q=13, p=0	28.7	63.5	86.9	90.9	83.4	74.2	45.5	32.9	9.1	12.0	9.0	32.9	45.3
q=7, p=3	36.7	73.7	77.8	93.8	84.9	77.7	38.2	27.5	26.6	-7.4	43.2	24.8	37.1
q=7, p=1	38.6	74.4	73.1	95.8	85.3	70.8	50.3	23.2	23.4	-3.6	31.9	21.9	46.6
q=7, p=0	104.8	62.7	70.3	96.8	82.5	71.9	48.7	25.6	19.4	-0.7	29.9	23.7	44.9
q=4, p=3	37.8	78.3	77.6	97.1	70.5	42.4	31.0	97.2	73.4	31.6	21.8	0.0	86.1
q=4, p=3	99.0	88.4	86.8	89.1	56.4	31.4	59.3	81.9	66.2	37.1	15.3	8.1	73.8

На рисунке 1 показаны графики искомой функции, полученные по заданным уровням грунтовых вод в $q=13,7$ и 4 точках при полном отсутствии информации об искомой функции.

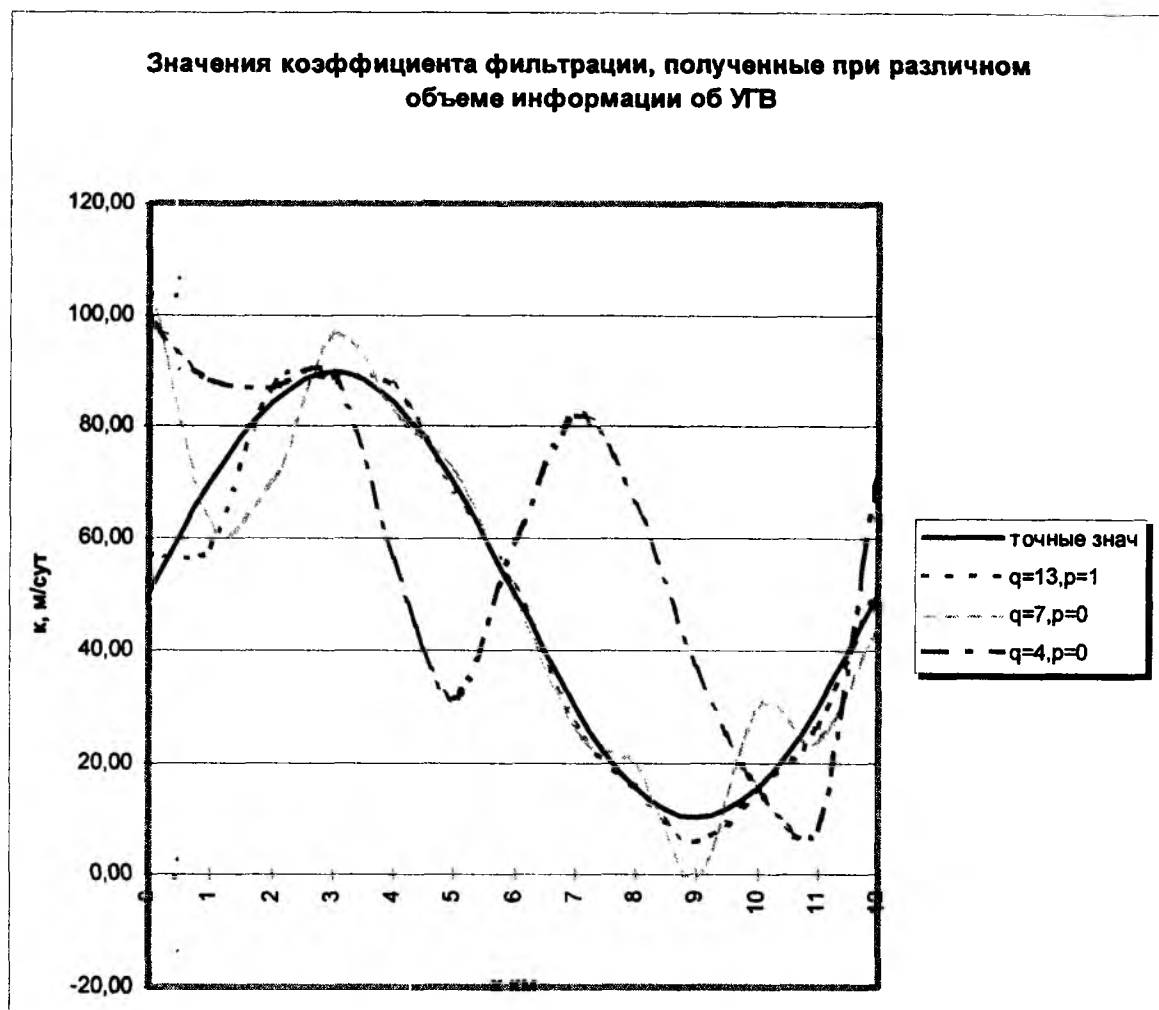


Рис. 1.

Выводы:

1. Предлагаемый метод решения коэффициентной обратной задачи одномерной установившейся фильтрации грунтовых вод дает удовлетворительные результаты при известных значениях уровней грунтовых вод во всей области фильтрации.
2. Уровни грунтовых вод мало чувствительны к изменениям коэффициента фильтрации. Итерационный процесс сходится к заданным уровням при значениях K , намного отличающихся от требуемых, изменяющихся в довольно широком диапазоне и даже при отрицательных его значениях, что противоречит физическому смыслу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1979.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Вариационно-разностный метод решения задач подземной фильтрации. -М.: ВИНТИ АН СССР, №182-74, Деп.19.01.1974.
3. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах.- Фрунзе: Илим, 1982.