УДК 05.13.16

М. У. Мурзакматов, Ж. М. Мамыров, К.А. Исабсков

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФРАГМЕНТНОСТИ ОБЛАСТИ

Путем введения произвольных линейно-независимых базисных функций предлагается новый алгоритм приближенного решения нестационарной задачи фильтрации подземных вод с использованием фрагментности области.

При исследовании задач фильтрации численными методами одной из основных трудностей является решение системы, состоящей из большого количества уравнений .Поэтому создание экономического метода приближенного решения начально-краевой задачи представляет собой актуальную проблему. Для решения этой проблемы целесообразно использовать естественную фрагментность исследуемой области фильтрации. Знание фрагментности области позволяет выделить участки, в пределах которых гидрогеологические параметры имеют постоянные значения или их значения изменяются незначительно. В таких случаях вместо относительно малых элементов можно использовать фрагменты для уменьшения количества уравнений, а для компенсации возросшей погрешности из-за уменьшения числа узлов желательно применять нелинейные,в общем случае произвольные,базисные функции.

Неустановившееся движение подземных вод в неоднородной пористой среде описывается уравнением

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y})-QH+f(x,y,t),\quad (x,y)\in D, t\in(t_0,t_1) \qquad (1)$$

с начальным

$$H(x,y,t_0)=\varphi(x,y),(x,y)\in D \qquad (2)$$

и краевым

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=\alpha(x,y,t)+\beta(x,y,t)H(x,y,t),(x,y)\in\partial D=\Gamma \qquad (3)$$

условиями. Здесь $\mu=\mu(x,y)$-коэффициент упругой водоотдачи; $T=T(x,y)$-коэффициент водопроводимости; $f(x,y,t)$-т.н.функция водообмена с другими водоносными пластами или с грунтом; $\alpha(x,y,t)$ и $\beta(x,y,t)$ -заданные функции; $H=H(x,y,t)$-искомая функция напора; D-область фильтрации, $\partial D=\Gamma$- ее граница.

Область течения подземных вод D разбиваем на m фрагментов треугольной формы, так что область D заменяется на многоугольник, состоящий из m треугольников .

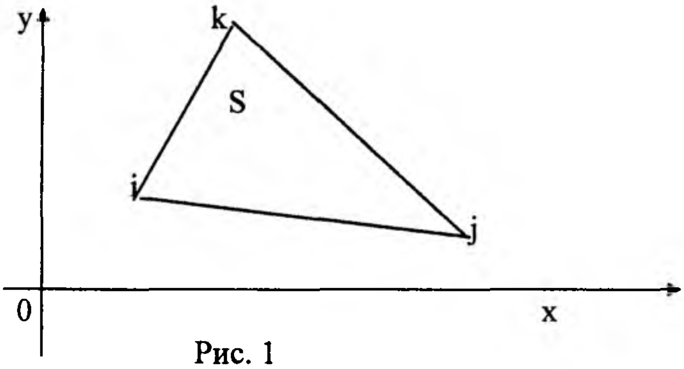

Рис. 1

На рис. 1 показан типичный фрагмент S с вершинами i, j и k, которые имеют координаты (x_i,y_i), (x_j,y_j) и (x_k,y_k).

Введем произвольные линейно -независимые функции $N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$ в области D и искомую функцию $H(x,y,t)$ внутри фрагмента S аппроксимируем функцией

$$H^s(x,y,t)=a_0^s(t)+a_1^s(t)N_1(x,y)+a_2^s(t)N_2(x,y), \qquad (4)$$

где $a_0^s(t)$,$a_1^s(t)$ и $a_2^s(t)$ - неизвестные коэффициенты при любой фиксированной переменой $t\in(t_0,t_1)$

Эти коэффициенты определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a_0^s(t)+a_1^s(t)N_1(x_i,y_i)+a_2^s(t)N_2(x_i,y_i)=H(x_i,y_i,t) \\ a_0^s(t)+a_1^s(t)N_1(x_j,y_j)+a_2^s(t)N_2(x_j,y_j)=H(x_j,y_j,t) \\ a_0^s(t)+a_1^s(t)N_1(x_k,y_k)+a_2^s(t)N_2(x_k,y_k)=H(x_k,y_k,t) \end{cases} \qquad (5)$$

В дальнейшем для краткости записи используем обозначения $N_{1i}=N_1(x_i,y_i)$,$N_{2j}=N_2(x_j,y_j)$и т.д. Из системы (5) находим,что

$$a_0^s(t)=[H_i(N_{1j}N_{2k}-N_{1k}N_{2j})+H_j(N_{1k}N_{2i}-N_{1i}N_{2k})+H_k(N_{1i}N_{2j}-N_{1j}N_{2i})/\Delta^s,$$

$$a_1^s(t)=[H_i(N_{2j}-N_{2k})+H_j(N_{2k}-N_{2i})+H_k(N_{2i}-N_{2j})]/\Delta^s, \qquad (6)$$

$$a_2^s(t)=[H_i(N_{1k}-N_{1j})+H_j(N_{1i}-N_{1k})+H_k(N_{1j}-N_{1i})]/\Delta^s,$$

где $H_i=H(x_i,y_i,t)$,$H_j=H(x_j,y_j,t)$,$H_k=H(x_k,y_k,t)$,

$\Delta^s=N_{1i}(N_{2j}-N_{2k})+N_{1j}(N_{2k}-N_{2i})+N_{1k}(N_{2i}-N_{2j})$.

Подставляя выражения для a_0,a_1и a_2 из формул (6) в равенство (4), имеем

$H^s(x,y,t)=\{[H_i(N_{1j}N_{2k}-N_{1k}N_{2k})+H_j(N_{1k}N_{2k}-N_{1i}N_{2k})+H_k(N_{1i}N_{2j}-N_{1j}N_{2i})]+N_1(x,y)[H_i(N_{2j}-N_{2k})+H_j(N_{2k}-N_{2i})+H_k(N_{2i}-N_{2j})]+N_2(x,y)[H_i(N_{1k}-N_{1j})+H_j(N_{1i}-N_{1k})+H_k(N_{1j}-N_{1i})]\}/\Delta^s$,

или окончательно

$$H^s(x,y,t)=H(x_i,y_i,t)N_i^s(x,y)+H(x_j,y_j,t)N^s{}_j(x,y)+H(x_k,y_k,t)N_k^s(x,y), \qquad (7)$$

где

$N_i^s(x,y)=[(N_{1j}N_{2k}-N_{1k}N_{2j})+(N_{2j}-N_{2k})N_1(x,y)+(N_{1k}-N_{1j})N_2(x,y)]/\Delta^s$,

$N_j^s(x,y)=[(N_{1k}N_{2i}-N_{1i}N_{2k})+(N_{2k}-N_{2i})N_1(x,y)+(N_{1i}-N_{1k})N_2(x,y)]/\Delta^s$,

$N_k^s(x,y)=[(N_{1i}N_{2j}-N_{1j}N_{2i})+(N_{2i}-N_{2j})N_1(x,y)+(N_{1j}-N_{1i})N_2(x,y)]/\Delta^s$,

откуда следует, что при линейно-независимых в области D функциях $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$ число Δ^s в нуль не обращается.

Функции $N_i^s(x,y)$, $N_j^s(x,y)$ и $N_k^s(x,y)$ в формуле (7) зависят как от координат, так и от номера фрагмента. Например, если к i-му узлу примыкают несколько фрагментов, функции $N_i^s(x,y)$ для этих фрагментов разные.

Функции $N_i^s(x,y)$, $N_j^s(x,y)$ и $N_k^s(x,y)$ обладают теми же свойствами,что и функции формы в классическом методе конечных элементов. Это можно проверить непосредственно. В самом деле,

$$N_i^s(x,y)=\begin{cases}1 & \text{при } x=x_i,y=y_i,\\ 0 & \text{при } x=x_j,y=y_j,\\ 0 & \text{при } x=x_k,y=y_k,\end{cases}$$

$$N_j^s(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x=x_i,y=y_i,\\ 1 & \text{при } x=x_j,y=y_j,\\ 0 & \text{при } x=x_k,y=y_k,\end{cases}$$

$$N_k^s(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x=x_i,y=y_i,\\ 0 & \text{при } x=x_j,y=y_j,\\ 1 & \text{при } x=x_k,y=y_k,\end{cases}$$

Кроме того , внутри фрагмента S с вершинами i, j и k имеет место равенство

$$N_i^s(x,y)+N_j^s(x,y)+N_k^s(x,y)=1.$$

Допустим, что при разбиении области D на m фрагментов число узлов, где необходимо определить значения искомой функции H(x,y,t), равно n. Тогда приближенное решение начально -краевой задачи можно представить в виде

$$H(x,y,t)\approx\sum_{S=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{3}H_iN_i^s(x,y),$$

или, после перенумеровки узлов в виде

$$H_n(x,y,t)=\sum_{r=1}^{n}H_r(t)N_r(x,y), \qquad (8)$$

где $N_r(x,y)=\sum_{s=1}^{S_r}N_r^s(x,y)$, S_r- число фрагментов , примыкающих к r-ой вершине.

Для приближенного решения поставленной задачи используем обобщенный метод Галеркина. Предварительно временной отрезок (t_0,t_1) разобьем на q элементарных отрезков

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,q$.

Подставляя в задаче (1)- (3) вместо $H(x,y,t)$ функцию $H_n(x,y,t)$ из формулы (8) и проведя интегрирование на отрезке (t_{k-1},t_k), по обобщенному принципу Галеркина получаем

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iint_D N_j(LH_n - f)d\sigma = -\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \int_\Gamma N_j(lH_n - \alpha)ds, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

где

$$L = \mu\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial}{\partial y}) + Q$$

$$l = T\frac{\partial}{\partial n} - \beta = T\left[\frac{\partial}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial}{\partial y}\cos(n,x)\right] - \beta(x,y,t)$$

Распишем формулу (9) более подробно . Имеем

$$\int_{T_{K-1}}^{T_K} dt \iint_D N_j \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_D \mu N_j \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial}{\partial t}\left[H_i(t)N_i(x,y)\right]dtd\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^n \iint_D \mu(x,y)N_j(x,y)N_i(x,y)d\sigma \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H_i(t)}{\partial t}dt = \sum_{i=1}^n M_{ij}\ H_i^k - \sum_{i=1}^n M_{ij}H_i^{(k-1)},$$

где

$$M_{ij} = \iint_D \mu(x,y)N_i(x,y)N_j(x,y)d\sigma, H_i^{(k)} = H_i(t_k), H_i^{(k-1)} = H_i(t_{k-1});$$

Используя первую формулу Грина, получаем:

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iint_D N_j\left[\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H_n}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H_n}{\partial y}) - QH_n\right]d\sigma =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} H_i(t)dt \iint_D N_j(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial N_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial N_i}{\partial y}) - QN_i\right]d\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\gamma H_i(t_k) + (1-\gamma)H_i(t_{k-1})\right]\Delta t_k \iint_D \left[T(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}) + QN_iN_j\right]d\sigma -$$

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \int_\Gamma N_jT\frac{\partial H_n}{\partial n}ds = \sum_{i=1}^n \gamma H_i(t_k)A_{ij}\Delta t_k + \sum_{i=1}^n (1-\gamma)H_i(t_{k-1})A_{ij}\Delta t_k - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \beta_j dt.$$

Здесь

$$A_{ij} = \iint_D T(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y})d\sigma + \iint_D QN_i(x,y)N_j(x,y)d\sigma,$$

$$B_j = \int_\Gamma N_j T\frac{\partial H_n}{\partial n}ds.$$

Далее,

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt\int_\Gamma N_j(lH_n - \alpha)ds = -\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_\Gamma N_j(T\frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha)dsdt =$$

$$= -\int_{t_{k-1}}^{t_k}\beta_j dt + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_\Gamma N_j(\beta H_i N_i + \alpha)dsdt.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (9), имеем j-ое уравнение системы относительно неизвестной $H_i^{(k)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ij}^{(\gamma)}H_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}^{(1-\gamma)}H_i^{(k-1)} + F_j, \qquad j = 1,2,...,n, \qquad (10)$$

где

$$R_{ij}^{(\gamma)} = M_{ij} + \gamma(A_{ij} - B_{ij})\Delta t_k, \qquad 0 \le \gamma \le 1,$$

$$F_j = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\iint_D N_j f(x,y,t)d\sigma dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_\Gamma N_j\ \alpha(x,y,t)dsdt,$$

$$B_{ij} = \int_\Gamma \beta\ N_j N_i ds.$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (10), получаем искомую функцию $H(x,y,t_k)$. Используя найденные значения функции H(x,y,t) на k- м временном слое в качестве начального условия , решаем задачу для (k+1)- го слоя, и т.д.

Из-за финитности функций N_i (x,y), N_j (x,y) и N_k (x,y) интегралы по области D заменяются интегралами по шаблону, состоящему из фрагментов, окружающих узел j.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.-М.: Наука , 1979.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.-М.: Мир, 1979.
3. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах.- Фрунзе: Илим, 1982.