

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

УДК 532.546

Ч. Джаныбеков, А.А. Уралиев, Г.К. Керимкулова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГРУНТОВЫХ ВОД С ДЕПРЕССИОННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается квазистационарное пространственное течение грунтовых вод, где неизвестный неоднородный коэффициент представлен в параметрической форме. Сформулирована начально-краевая задача в области, ограниченной сверху депрессионной поверхностью. Описана итерационная процедура, основанная на методе конечных фрагментов МКФ, приближенно реализующая итерацию на ПЭВМ.

Рассмотрим трехмерную область D , ограниченную сверху депрессионной поверхностью D_c , снизу водоупором D_b , а по боковой части ограниченной цилиндрической поверхностью D_6 . Координатную систему расположим так, чтобы ось z была направлена вертикально вниз, а ось ox - направо. При принятом допущении уравнения неразрывности и движения представляются в виде [1]

$$v_x^1 + v_y^2 + v_z^3 = 0, \quad (1)$$

$$v^1 = -kh_x, \quad v^2 = -kh_y, \quad v^3 = -kh_z, \quad h = p - \gamma z. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v} = (u, v, w)$ - вектор скорости фильтрации, $k=k(x, y, z)$ - коэффициент фильтрации, h - функция напора, p - давление, $\gamma = \rho g$, где ρ - плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести.

Итак, изучаемое нами фильтрационное течение сверху ограничено неизвестной депрессионной поверхностью D_c . В модели (1), (2) предполагаем, что и $k(x, y, z)$ - неизвестная функция. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы для модели (1), (2) разработать алгоритм, приближенно разрешающий начально-краевую задачу, встречающуюся при разрешении практических задач гидрогеологии.

Сформулируем граничные условия. Пусть на боковой цилиндрической поверхности D_6 задана функция напора.

$$h(t, x, y, z) = H(t, x, y, z), \quad (x, y, z) \in D_6, \quad t \in (t_0, T), \quad (3)$$

на водоупоре D_b уравнением $z = f_2(x, y)$ задано условие

$$k \frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad (x, y, z) \in D_b, \quad t \in (t_0, T), \quad (4)$$

и наконец, на депрессионной поверхности уравнением

$$F(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y) + z = 0, \quad (5)$$

задается условие

$$h(t, x, y, z) \Big|_{z = -\varphi(t, x, y)} = \varphi(t, x, y), \quad (x, y) \in D_s, \quad t \in (t_0, T). \quad (6)$$

Здесь D_s - кривая, образованная пересечением поверхностей D_c и D_b . Для ясности изложения мы воспользуемся результатами работы [2], где для модели (1), (2) с помощью группового анализа дифференциальных уравнений было построено параметрическое представление коэффициента фильтрации неоднородной среды

$$k(x, y, z) = \tilde{C} \frac{z^\lambda}{y^{\lambda+2}} \bar{k}_1\left(\frac{x}{y}\right). \quad (7)$$

Здесь λ и $\tilde{C}$ - произвольные постоянные параметры, $\bar{k}_1(\xi) = \bar{k}_1\left(\frac{x}{y}\right)$ - произвольная функция от аргумента ξ .

Используя найденные там инварианты, решение уравнения (1) и (2) ищем в виде

$$h(t, x, y, z) = y \bar{h}(t, \xi, \eta), \quad v(t, x, y, z) = \frac{1}{y^2} \bar{v}(t, \xi, \eta), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (8)$$

где

$$\xi = \frac{x}{y}, \quad \eta = \frac{z}{y}. \quad (9)$$

В данном представлении коэффициент фильтрации имеет вид

$$k = \tilde{C} \eta^\lambda \frac{1}{y^2} \bar{k}_1(\xi). \quad (10)$$

Уравнения (1) и (2) с учетом (7), (8) и (9) переходят в

$$\frac{1}{\bar{v}} = -\tilde{C} \eta^\lambda \bar{k}_1 \bar{h}_\xi, \quad \frac{2}{\bar{v}} = -\tilde{C} \eta^\lambda \bar{k}_1 (\bar{h} - \xi \bar{h}_\xi - \eta \bar{h}_\eta), \quad \frac{3}{\bar{v}} = -\tilde{C} \eta^\lambda \bar{k}_1 \bar{h}_\eta, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\bar{v}_\xi} - \xi \frac{2}{\bar{v}_\xi} - \eta \frac{2}{\bar{v}} - 2 \frac{2}{\bar{v}} + \frac{3}{\bar{v}_\eta} = 0. \quad (12)$$

Из (12) с учетом (11) получим линейное уравнение относительно $\bar{h}$

$$\bar{k}_1 \left[(1 + \xi^2) \bar{h}_{\xi\xi} + 2\xi\eta \bar{h}_{\xi\eta} + (1 + \eta^2) \bar{h}_{\eta\eta} \right] + \left[(1 + \xi^2) \bar{k}_{1\xi} + (2 + \lambda) \xi \bar{k}_1 \right] \bar{h}_\xi + \\ + \left[\xi\eta \bar{k}_{1\xi} + (\lambda + 2)\eta \bar{k}_1 + \frac{\lambda}{\eta} \bar{k}_1 \right] \bar{h}_\eta - \left[\xi \bar{k}_{1\xi} + (2 + \lambda) \bar{k}_1 \right] \bar{h} = 0. \quad (13)$$

Переходя к новым переменным

$$\sigma = \ln \frac{\eta + \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \tau = \arctg \xi, \quad (14)$$

уравнение (13) представим в дивергентной форме

$$-\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K \frac{\partial \bar{h}}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(K \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} \right) + W \bar{h} = 0, \quad (15)$$

удобной для использования метода Галеркина. Здесь

$$W = \frac{\Psi(\tau) \operatorname{tg} \tau + \lambda + 2}{\cos^2 \tau} K, \quad K = \left(\frac{\operatorname{sh} \sigma}{\cos \tau} \right)^\lambda \exp \int \frac{\Psi(\tau)}{\cos^2 \tau} d\tau. \quad (16)$$

Преобразование, обратное к (14), имеет вид

$$\xi = \operatorname{tg} \tau, \eta = \operatorname{sh} \sigma / \cos \tau. \quad (17)$$

при этом

$$\Psi(\tau) = \Phi(\operatorname{tg} \tau) = \bar{k}_{1\xi} / \bar{k}_1.$$

Следует заметить, что последовательное использование преобразований (9) и (14) привели к квазидвумерному уравнению (15). Согласно (9), начало координат мы должны располагать так, чтобы оно лежало вне области D и имело место $|\xi| < 1$.

Как видно из (10), коэффициент k содержит произвольные параметры λ , $\tilde{C}$ и произвольную функцию $\bar{k}_1(\xi)$. Разлагая функцию по степеням $\xi = \frac{x}{y}$:

$$k = \tilde{C} \eta^\lambda / y^2 [a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_r \xi^r] \quad (18)$$

и измеряя коэффициент фильтрации более чем в $r+2$ точках, получим конкретную функцию k , аппроксимирующую ее в области D . Далее, подставляя найденные значения параметров и функцию k в уравнение (15), имеем линейное уравнение с определенно заданными коэффициентами.

Теперь можно приступить к созданию алгоритма, который с применением ЭВМ приближенно разрешает сформулированную выше краевую задачу. Единственное нелинейное краевое условие (6) имеет место при всех $t \in (t_0, T)$. Это означает, что в начале счета нам необходимо иметь либо депрессионную поверхность $z_0 = -\varphi(t_0, x, y)$, либо значения функции напора $h(t, x, y, z_0)$ на нем. На практике мы не имеем ни того, ни другого. Для нашей цели достаточно иметь в момент времени t_0 значение напора на некотором множестве точек, лежащих на депрессионной поверхности.

Хотя тут мы утверждали о наличии в природе депрессионной поверхности (5), на самом деле в процессе моделирования ее следует построить, т.е., решая сформулированную краевую задачу, мы одновременно должны определять эту поверхность. Для этого, вычисляя из (5) полную производную по t , получим уравнение

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Как известно, решением уравнения (19) является функция от четырех аргументов, т.е. уравнение (19) содержит несравнимо богатую информацию, чем неизвестная функция, представленная в виде (5).

Переумножая уравнение (19) на величину пористости грунта, т.е. на μ и используя известные соотношения [1]

$$\mu \frac{\partial x}{\partial t} = v^1, \quad \mu \frac{\partial y}{\partial t} = v^2, \quad \mu \frac{\partial z}{\partial t} = v^3,$$

из (19) приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + v^3 = 0, \quad (20)$$

описывающему динамику депрессионной поверхности D_* .

Важно заметить, что для процесса моделирования месторождения подземных вод (МПВ), вышеперечисленных краевых условий мы не имеем. Поэтому нам приходится предварительно провести работу по схематизации объекта, выделив из МПВ область D , где удобно образовывать дополнительные условия. Кроме того, исходя из ОФР и используя данные наблюдений, следует образовывать начально-краевые условия.

Поскольку главное уравнение (15) представлено через новые переменные (σ, τ) , то необходимо и краевое условие для него также заранее представить относительно этих же переменных.

Итак, допустим, что необходимые начально-краевые условия (3), (4) и (6) также представлены через σ и τ . Ради краткости изложения не будем расписывать все подробности преобразования, а будем считать, что они предварительно представлены через новые аргументы σ и τ .

Приступим к описанию алгоритма, приближенно разрешающего краевую задачу для уравнения (15). Ее дивергентная форма существенно облегчает проблему приближенного решения соответствующей краевой задачи. Поскольку оно представлено в виде квазидвумерного уравнения относительно переменных σ и τ , размерность СЛАУ, вытекающей при аппроксимации краевой задачи, существенно уменьшается, а ее характеристики улучшаются. Остановимся на двух разных алгоритмах.

1. Первый алгоритм связан с приближенным решением трехмерной краевой задачи. С целью облегчения рассуждения допустим, что верхняя поверхность известна, а краевые условия задачи (15), (3), (4) и (6) заданы в момент времени $t=t_0$ (нетрудно увидеть, что здесь t играет роль параметра). Пусть область D сверху ограничена поверхностью, заданной уравнением $z^{(0)} = -\phi^{(0)}(t_0, x, y)$. Итак, мы получим смешанное краевое условие для уравнений (15).

С помощью формул перехода (9) и (14), заданные краевые условия представлены через переменные σ и τ . На верхней поверхности области D задается краевое условие первого рода, а область D по направлению оси ou ограничена плоскостями $y=a$ и $y=b$. Отрезок $[a, b]$ разбиваем на k частей точками $y_0 = a < y_1 < y_2 < \dots < y_k = b$. Далее, пересекая ее параллельными плоскостями $y=y_r$ ($r=1, 2, \dots, k-1$), имеем $k-1$ сечений в области. Тогда согласно преобразованиям (9) и (14) на этих сечениях имеем связь между переменными

$$\sigma_r(x, z) = \ln \frac{z + \sqrt{x^2 + y_r^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y_r^2}}, \quad \tau_r(x, z) = \arctg \frac{x}{y_r}, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (21)$$

В двумерной области $S_r = S(x, y, z)$ приближенно решаем квазидвумерную задачу для уравнения (15) с краевыми условиями, образованными на линиях пересечения плоскости S_r с верхними, нижними и боковыми поверхностями D . С этой целью, пересекая область D плоскостями $x = x_p$ и $z = z_q$, каждая из которых параллельна к координатным плоскостям, на S_r образуем треугольную сетку. Пусть количество узлов на S_r будет r_i .

Отрезок $t \in (t_0, T)$ разделим на s частей точками $t_0, t_1, t_2, \dots, t_s = T$. В момент времени t_1 решение сформулированной краевой задачи в области S_r ищем в виде

$$h_{r_i}^0 = \sum_{j=1}^{r_i} h_j(t) \bar{N}_j(\sigma_r, \tau_r), \quad (22)$$

где $\bar{N}_j(\sigma_r, \tau_r) = \bar{N}_j(\sigma_r(x, z), \tau_r(x, z))$ - базисные функции, $h_j(t)$ - неизвестный коэффициент. Заметим, что если используем МКЭ, то $\bar{N}_j$ - известные линейные базисы, а при применении МКФ $\bar{N}_j$ - известные функции, способ выбора которых подробно изложен в работе [3]. Решая сформулированную краевую задачу в области S_r методом Галеркина, вычислим функцию $h_{r_i}^0$. Аналогично, решая соответствующие задачи на $k-2$ плоских сечениях области D , находим функции $h_{r_i}^0$, где $r_i = 1, 2, \dots, k-1$. Тем самым мы построим по всем сечениям S_r ($r = 1, 2, \dots, k-1$) и, следовательно, по D .

2. Рассмотрим способ приближенного решения нелинейного уравнения (20). Если допустить, что компоненты вектора скорости v_1, v_2 и v_3 известны, то оно окажется линейным уравнением первого порядка относительно φ . Это уравнение при наличии начально-краевых условий и необходимой гладкости коэффициентов имеет единственное решение, т.е. чтобы вычислить единственное решение, мы должны иметь условия

$$\varphi(t, x, y)|_{t=t_0} = \varphi^1(x, y), \quad \varphi(t, x, y)|_S = \varphi^0(t, x, y), \quad (23)$$

где S - замкнутая кривая, образованная пересечением поверхностей D_6 и $z = -\varphi^0(t, x, y)$. Пусть: D_{C^0} - поверхность $z = -\varphi^0(t, x, y)$, ограниченная кривой S ; D_{xy} - вертикальная проекция области D_{C^0} на плоскости xOy .

Приближенное решение задачи (20), (23) при заданных v_1, v_2 и v_3 ищем в виде

$$\varphi_m(t, x, y) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) N_i(x, y), \quad (24)$$

где $(x, y) \in D_{xy}$, m - количество узлов, $\varphi_i(t) = \varphi(t, x_i, y_i)$, $N_i(x, y)$ - базисные функции и (x_i, y_i) - узлы сетки. Если область D_{xy} небольшая, то используем

МКЭ, а $N_i(x, y)$ будут известными линейными базисами. При большой протяженности области D_{xy} воспользуемся аппаратом МКФ. При этом базисы $N_i(x, y)$ специальным образом будут подбираться как в [3].

В области D_{xy} проведем триангуляцию с таким расчетом, чтобы вершины треугольников лежали на пересечениях плоскостей S_r с координатной плоскостью xy , при этом избегаем образования клинообразных (острыми углами при вершинах) треугольников.

Приближенное решение задачи (20) и (23) реализуем методом Галеркина. Согласно методу Галеркина имеем:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{D_{xy}} \left[\mu \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + v^3 \right] N_j(x, y) dS = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Здесь dS - элементарная площадь проекции на D_{xy} .

Подставляя (24) в (25), приходим к системе

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\Delta} \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Delta} \left[\mu \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} N_i + \varphi_i(t) \left(v^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + v^3 \right] N_j dS = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Приближенно интегрируя уравнение (26) по времени, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta} \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Delta} \mu \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} N_i N_j dS &= (\varphi_{i,1} - \varphi_{i,0}) \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \mu N_i N_j dS, \\ \sum_{\Delta} \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Delta} \varphi_i(t) \left(v^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j dS &= \alpha \varphi_{i,1} \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \left(v_1^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_1^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j dS + \\ &+ (1 - \alpha) \varphi_{i,0} \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \left(v_0^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_0^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j dS, \\ \sum_{\Delta} \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{\Delta} v^3 N_j dS &= \alpha \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} v_1^3 N_j dS + (1 - \alpha) \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} v_0^3 N_j dS, \end{aligned} \quad (27)$$

где α принимает значение от нуля до единицы, $\varphi_{i,v} = \varphi_i(t_v)$,

$v_v^p = v(t_v, x, y, -\varphi^0(t_v, x, y))$, $i = \overline{1, m}$, $v = 1, 2$, $p = 1, 2, 3$. Здесь учитывается, что пористость μ не зависит от времени t .

Подставляя (27) в (26), имеем СЛАУ относительно искомым параметров $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,1}$, ..., $\varphi_{m,1}$:

$$\sum_{i=1}^m A_{ij} \varphi_{i,k} = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \mu N_i N_j dS + \alpha \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \left(v_1^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_1^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j dS, \\ B_j &= \sum_{i=1}^m \varphi_{i,0} \left[\sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \mu N_i N_j dS + (1 - \alpha) \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \left(v_0^1 \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_0^2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) N_j dS \right] + \end{aligned}$$

$$+ \alpha \sum_{\Delta} \iint_{\Delta}^3 v_1 N_j dS + (1 - \alpha) \sum_{\Delta} \iint_{\Delta}^3 v_0 N_j dS. \quad (29)$$

После изложения вышеприведенных двух алгоритмов, вернемся к описанию итерационной процедуры, приближенно разрешающей начально-краевую задачу (15), (3), (4), (6) с начальным условием из (23). При математическом моделировании реального объекта эти начально-краевые условия не задаются. Следует их образовать с помощью опытно-фильтрационных работ (ОФР) и наблюдений. Допустим, что их образовали в реальной трехмерной ограниченной области D . Тогда с помощью формул перехода (9), (14) (или (21)) используем их для квазидвумерного уравнения (15).

В начале итерации субъективно зададим начальное положение депрессионной поверхности или уровня грунтовых вод (УГВ) D_{c^0} . Поскольку в начале счета мы можем наблюдать некоторые точки УГВ, то эти точки располагаем на узлах D_{c^0} . Задавая в остальных узлах их значения, субъективно образуем за начальное условие поверхность вида (24). Пусть эта поверхность $z = -\varphi_m^0(t_0, x, y)$ представлена в виде (24). Краевое условие из (23) образуется аналогично путем наблюдения.

Решая краевую задачу для уравнения (15) в области D^0 , ограниченной сверху поверхностью D_{c^0} , найдем поле напоров $h_n^{(0)}$, которое принимаем за нулевое приближение.

Далее, с применением формул перехода (17), (9) и равенств (8), вычислим $h^0(t, x, y, z)$, $v^i(t, x, y, z)$, ($i=1, 2, 3$). Подставляя найденные значения в коэффициент уравнения (20), с помощью алгоритма, изложенного в пункте 2, вычислим функцию $\varphi_m^{(1)}(t, x, y)$ согласно формулам (24) при $t=t_1$. Проверяем выполнение неравенства

$$|\varphi_m^{(0)}(t_1, x_i, y_i) - \varphi_m^{(1)}(t_1, x_i, y_i)| < \varepsilon, \quad (30)$$

где ε - наперед заданное малое положительное число, $i=1, 2, \dots, m$. Если неравенство (30) не выполняется, то продолжим счет до ее выполнения, при этом за z надо брать $z = -\varphi_m^{(1)}(t, x, y)$. Когда (30) выполняется по всем узлам, то переходим к решению краевой задачи для уравнения (15), изложенным в первом пункте способом. Далее проверяем выполнение условия

$$|h_n^{(1)}(t_1, x_j, y_j, z_j) - h_n^{(0)}(t_1, x_j, y_j, z_j)| < \delta, \quad (31)$$

где δ - также заданное малое положительное число. Здесь j пробегает по всем узлам области D .

Если выполняется и это условие, считаем, что найдено искомое поле $h_n^{(1)}$ и его принимаем за приближенное решение в момент времени t_1 . Далее аналогично продолжается полная итерационная процедура для

последующих моментов времени $t_2, t_3, \dots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. -М.: Наука, 1977.-644 с.
2. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А., Керимкулова Г.К. Моделирование пространственной фильтрации подземных вод //Мат. научно-прак. конф., посвящ. 5-летию Чуйского университета, 13-14 мая 1998 г.- Бишкек, 1998. -С.54-64.
3. Джаныбеков Ч.Дж., Джаманбаев М.Дж., Картанова А.Дж. Об одном экономичном приближенном методе решения задач подземной гидродинамики //Мат. научно-прак. конф., посвящ. 5-летию Чуйского университета, 13-14 мая 1998 г.- Бишкек, 1998. - 10 с.