

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

В данной работе изучается вопрос о существовании и гладкости решения операторного уравнения нечетного порядка на бесконечном интервале.

В результате получены достаточные условия на операторный коэффициент, который позволяет рассматриваемому уравнению иметь единственное гладкое решение на бесконечном интервале.

Пусть H - абстрактное сепабельное пространство Гильберта. Обозначим через $H_1 = L_2(\mathbb{R}, H)$ гильбертово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(\mathbb{R}, H)$ - множество бесконечно гладких вектор-функций, определенных на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ со значением в H по норме

$$\|f\|_{H_1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

соответствующей скалярному произведению

$$(f(x), g(x))_{H_1} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x)) dx.$$

В данной работе изучается вопрос существования и гладкости решений дифференциального уравнения нечетного порядка.

$$-U''' + Q(x)U = f(x) \quad (1)$$

в пространстве $H_1 = L_2(R, H)$.

Вопрос существования и гладкости решений уравнения (1) эквивалентен разделимости дифференциального оператора $LU = U''' + Q(x)U$ в пространстве H_1 .

Определение: Оператор L называется разделимым в пространстве H_1 если из того, что $U \in D(L)$ следует, что $U''' \in H_1$, где $D(\cdot)$ - область определения.

Пусть $Q(x)$, ($x \in R$) - самосопряженная операторная функция в H , удовлетворяющая следующим условиям:

$$I. (Q(x)f, f)_H \geq \delta (f, f)_H, f \in D$$

$D = D(Q(x))$ - область определяющая операторов $Q(x)$, $\delta > 0$

$$II. \sup \left\{ \left\| [Q(x) - Q(x)] [Q(x) + \lambda]^{-2} \right\|_H + \left\| [Q(y) - Q(x)] [Q(y) + \lambda] \right\|_H \right\} \leq 0, \lambda \gg 1 \quad (1)$$

III. Для почти всех x оператор $Q(x)$ является обратным к вполне непрерывному оператору.

Теорема: Пусть выполнены условия I-III. Тогда оператор $L + \lambda E$ имеет ограниченный обратный и оператор L разделим в пространстве H_1 .

Доказательство теоремы опирается на нижеустанавливаемые леммы.

Возьмем функцию $r(x) \in C_0^\infty(R)$ такое, что

$$r(x) = \begin{cases} 1, & |x| = \frac{1}{2} \\ x \leq 1, & x \in R \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

определим $r_j(x) = r(x-j)$ как сдвиг функции на j вправо.

Рассмотрим $\sum_{j=-\infty}^{\infty} r_j^2(x)$.

Из построения справедлива оценка $1 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_j^2(x) \leq 64$.

Введем функции

$$\varphi_j(x) = \frac{r_j(x)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} r_j^2(x)^{\frac{1}{2}}}$$

Очевидно, что $\text{supp } \varphi_j(x) = [j-1, j+1]$ и $\sum \varphi_j^2 \equiv 1$.

Продолжим операторную функцию $Q(x)$ из интервала $\Delta j = [j-1, j+1]$ на все R так, чтобы ее продолжение $Q_j(x)$ было периодической операторной функцией по x .

Обозначим через L_j замыкание дифференциального выражения $L_{0j} U = U''' + Q_j(x) U$, определенного на $C_0^\infty(R, H)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия I-III.

Тогда оператор L_j имеет ограниченный обратный.

Доказательство: Если $\{\ln(j)\}$ - полная ортонормированная система собственных функций оператора $Q(j)$, то при каждом x для любой функции $U(x) \in H_1$ справедливо разложение:

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \ln(j)$$

Используя такие разложения для функции $U(x)$, $U'''(x)$

($U(x) \in C_0^\infty(R, H)$) и последующим применением интегрирования по частям имеем

$$(L_j U, U)_{H_1} \geq \delta \|U\|_{H_1}^2$$

Применив к левой части неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|L_j U\|_{H_1} \geq \delta \|U\|_{H_1} \quad (2)$$

Рассмотрим уравнения

$$\tilde{L}_j U + \lambda U = -U''' + (Q(j) + \lambda) U = f(x) \quad (3) \quad f(x) \in H_1$$

Разложим функции $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\ln(j)\}$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) \ln(j), \quad (N \rightarrow \infty)$$

Решения уравнения (3) будем искать в виде

$$U_N(x) = U_n(x) \ln(j)$$

Тогда

$$-\sum_{n=1}^N U_n''' \ln(j) + \sum_{n=1}^N (\lambda_n + \lambda) U_n(x) \ln(j) = \sum_{n=1}^N f_n(x) \ln(j)$$

λ_n - собственное значение оператора $Q(j)$.

Переумножив скалярно на $\ln(j)$ для каждого n получим уравнение

$$U_n'''(x) + (\lambda_n + \lambda) U_n(x) = f_n(x), \quad (\lambda_n + \lambda > 0) \quad (4)$$

Это уравнение при любом $f_n(x) \in L_2(R)$ имеет единственное решение из $L_2(R)$.

Из фундаментальности последовательности $\{f_n(x)\}$ в силу неравенства (2) сразу следует фундаментальность $\{U_n(x)\}$ в H_1 .

Так как H_1 - полное пространство, то $U = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N(x)$ является единственным решением уравнения (3) для любого $f \in H_1$.

Этим доказано, что существует ограниченный обратный оператор $\tilde{L}_j + \lambda \varepsilon$, определенный во всем пространстве H_1 .

Перемножив обе части уравнения (4) скалярно на $U_n(x)$ и последующим применением интегрирования по частям, имеем

$$(\lambda_n + \lambda) (U_n, U_n)_2 = (f_n, U_n)_2$$

Применив к левой части неравенство Коши – Буняковского, получим

$$(\lambda_n + \lambda) \|U_n\|_2 \leq \|f\|_2, \text{ т.е.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_n|^2 dx = \frac{1}{(\lambda_n + \lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n|^2 dx \quad (5)$$

Для нормы элемента $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ln(j)$ справедливо равенство

$$\|f(x)\|_{H_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) dx \quad (6)$$

С помощью (5), (6) оценим норму элемента $(Q(j) + \lambda)U$

$$\|(Q(j) + \lambda)U\|_{H_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|(Q(j) + \lambda)U\|_{H_1}^2 dx \leq \|f\|_{H_1}^2 \text{ откуда}$$

$$\|(Q(j) + \lambda)[\tilde{L}_j + \lambda E]^{-1}\|_{H_1} \leq \|f\|_{H_1} \quad (7)$$

Воспользуемся условием II и неравенством (7) имеем

$$\|(Q(j) - Q_j(x))(\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1} \leq 0 \quad (8)$$

Так как $(L_j + \lambda E)U = ((\tilde{L}_j + \lambda E)U - [Q(j) - Q_j(x)]U)$,

$$\begin{aligned} \text{то } L_j + \lambda E &= (\tilde{L}_j + \lambda E)U - [Q(j) - Q_j(x)](\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}(\tilde{L}_j + \lambda E) = \\ &= [E - (Q(j) - Q_j(x))(\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}(\tilde{L}_j + \lambda E)] \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (3) существует ограниченный обратный

$$[E - (Q(j) - Q_j(x))(\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}(\tilde{L}_j + \lambda E)]^{-1} = B$$

Тогда из (9) получим $(L_j + \lambda E)^{-1} = (\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}B$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть для некоторого $\lambda > 0$ оператор $(L + \lambda E)$ обладает ограниченным обратным в пространстве H_1 .

Тогда для $f \in C_0^\infty(R, H)$ справедливо равенство:

$$(L + \lambda E)^{-1}f = (L + \lambda E)^{-1}B_\lambda f + M_\lambda f, \quad (10)$$

где $B_\lambda f = f - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (L_j + \lambda E)\varphi_j(L + \lambda E)^{-1}\varphi_j f$

$$M_\lambda f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(L_{0j} + \lambda E)^{-1}\varphi_j f$$

Доказательство леммы основывается в следующем :

Так как $f \in C_0^\infty(R, H)$ и в суммах, определяющих $B_\lambda f$, $M_\lambda f$ содержится только конечное число слагаемых. В носителе функции φ_j коэффициенты L , L_j совпадают. А обратимость оператора L_j следует из леммы 1.

Лемма 3. Пусть для некоторого $\lambda > 0$ выполнено $\|B_\lambda\| < 1$. Тогда оператор L обратим в пространстве H_1 . А если помимо неравенства $\|B_\lambda\|_{H_1} < 1$ выполнено :

$$\sup\{\|Q_j(x)(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1} \mid j=0, \pm 1, \pm 2, \dots\} < \infty,$$

то оператор L разделим.

Доказательство: Если $\|B_\lambda\|_{H_1} < 1$ то операторное уравнение

$X(E - B_\lambda) = M_\lambda$ имеет единственное решение $X_\lambda = M_\lambda(E - B_\lambda)^{-1}$ и непосредственно можно проверить, что $X_\lambda(L + \lambda E) = E$, $(L + \lambda E)X_\lambda = E$. Это означает, что существует обратный к оператору X_λ , и он совпадает с замыканием в норме H_1 оператора $L + \lambda E$, определенного в $C_0^\infty(R, H)$. Поэтому из (10) получаем $(L + \lambda E)^{-1} = M_\lambda(E - B_\lambda)^{-1}$. Отсюда, т.к. оператор $(E - B_\lambda)^{-1}$ ограничен, вытекает:

$$\|Q(x)(L + \lambda E)^{-1}\| \leq C(\lambda)\|Q(x)M_\lambda\| \quad (11)$$

Учитывая неравенство $(\sum_{k=1}^5 a_k)^2 \leq 5 \sum_{k=1}^5 a_k^2$, получим

$$\|Q(x)M_\lambda\|_{H_1}^2 \leq C \sup\{\|Q_j(x)(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Лемма 3. Доказана.

Лемма 4. Предположим, что для всякого $j \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\|Q(x) + \lambda U\|_{H_1} \leq \|(L_j + \lambda E)U\|_{H_1}$

Тогда для операторов $L + \lambda E$ существует ограниченный обратный.

Доказательство: при $U \in D(L_j)$ имеем

$$\| -U''' \|_{H_1}^2 = \|(L_j + \lambda E)U - [Q_j(x) + \lambda]U\|_{H_1}^2 \leq (1+C)\|(L_j + \lambda E)U\|_{H_1}^2$$

$$\text{Тогда } \| -U''' \|_{H_1}^2 + \|\lambda U\|_{H_1}^2 \leq C\|(L_j + \lambda E)U\|_{H_1}^2 \quad (12)$$

Оценим норму оператора $D^\infty(L_j + \lambda E)^{-1}$

$$\|D^\alpha(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}^2 = \sup_{U \in D(L_j)} \frac{\|D^\alpha(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}^2}{\|f\|_{H_1}^2} = \sup_{U \in D(L)} \frac{\|D^\alpha D\|_{H_1}^2}{\|(L_j + \lambda E)U\|_{H_1}^2}$$

Учитывая (12), имеем:

$$\|D^\alpha(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}^2 = \sup_{U \in C_0^\infty(E, H)} \frac{\|D^\alpha D\|_{H_1}^2}{\| -U''' \|_{H_1}^2 + \|\lambda U\|_{H_1}^2}$$

Сделаем

преобразование

$$x = \lambda^{-1/3}z,$$

тогда

$$\|D^\alpha(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{H_1}^2 \leq C\lambda^{-2+2a/3} \sup_{U \in C_0^\infty(E, H)} \frac{\|D^\alpha D\|_{H_1}^2}{\| -U''' \|_{H_1}^2 + \|\lambda U\|_{H_1}^2} \leq C\lambda^{-2+2a/3}$$

При $|\beta| \neq 0$, $|\beta| + |\alpha| \leq 3$, $|\alpha| \leq 2$ и учитывая (13), получим

$$\|D^\beta \varphi_j D^\alpha (L_j + \lambda E)^{-1}\| \leq C\lambda^{-1+\alpha/\beta} \|D^\beta \varphi_j\|_{C(R, H)} \quad (14)$$

Теперь распишем $B_\lambda f$.

$$\begin{aligned} B_\lambda f &= f - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (L_j + \lambda E) \varphi_j V_j = f - \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(\varphi_j V_j)''' + (Q_j(x) + \lambda) \varphi_j V_j] = \\ &= f - \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(-\varphi_j''' V_j - 3\varphi_j'' V_j' - 3\varphi_j' V_j'' + \varphi_j (-V_j''' + (Q_j(\lambda) + \lambda) V_j)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f + \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(\varphi_j''' V_j + 3\varphi_j'' V_j' + 3\varphi_j' V_j'' - \varphi_j (L_j + \lambda E) V_j)] = \\
 &= f + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\varphi_j''' V_j + 3\varphi_j'' V_j' + 3\varphi_j' V_j'') - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j^2 f = \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\varphi_j''' V_j + 3\varphi_j'' V_j' + 3\varphi_j' V_j''), \text{ где } V_j = (L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f
 \end{aligned}$$

Отсюда заметим, что в силу неравенства (14) при достаточно большом значении λ $\|B_\lambda\| < 1$. Тогда доказательство леммы 4 следует из леммы 3.

Приступим к доказательству теоремы. Используя неравенства (7), (8), оценим норму $\| [Q_j(x) + \lambda] U \|_{H_1}$

$$\begin{aligned}
 \| [Q_j(x) + \lambda] U \|_{H_1} &= \| [Q_j(x) + \lambda] [L_j + \lambda E]^{-1} f \|_{H_1} \leq \\
 &\leq \| [Q_j(x) + \lambda] [L_j + \lambda E]^{-1} f + [Q_j(x) + Q_j(j)] (L_j + \lambda E)^{-1} f \|_{H_1} \leq \\
 &\leq \| [Q_j(x) + \lambda] (L_j + \lambda E)^{-1} B_\lambda f \| + \| [Q(j) - Q_j(x)] (\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1} B_\lambda f \|_{H_1} \leq \\
 &\leq (\| [Q(j) + \lambda] (\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1} \| + \| [Q(j) - Q_j(x)] (\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1} \| \|B_\lambda\| \|f\|) \leq C \|f\|_{H_1}
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности f получим

$$\| [Q_j(x) (\tilde{L}_j + \lambda E)^{-1}] \| \leq \| [Q_j(x) + \lambda] (L_j + \lambda E)^{-1} \| \leq C$$

Это неравенство вместе с леммой 3 доказывает разделимость оператора L .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тогочуев А.Ж., Муратбеков М.Б. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом //Тезисы докладов. Конференция математиков и механиков Киргизии, посвященная 70-летию Великого Октября, 1987. –С. 72.