

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙНОВ

Разрабатывается алгоритм приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II-рода с помощью кубических сплайнов, который апробирован на решении тестовой задачи.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма II-рода

$$y(x) + \int_a^b K(x,t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

в котором ядро $K(x,t)$ и функция $f(x)$ непрерывны соответственно по совокупности переменных (x,t) в квадрате $\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ и в промежутке $a \leq x \leq b$.

Предполагаем, что ядро уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt < \infty,$$

а свободный член $f(x)$ — неравенству

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Для приближенного решения уравнения (1) применяем кубические сплайны [1]:

$$S_{\Delta}(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_{j-1}} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_{j-1}} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_{j-1}^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_{j-1}} + \left(y_j - \frac{M_j h_{j-1}^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}},$$

$$x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad h_{j-1} = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь $M_j = S_{\Delta}''(x_j)$ — «моменты», $j = 0, 1, \dots, n$. Они связаны со значениями функции $y(x)$ уравнениями

$$\frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{h_{j-1} + h_j}{3} M_j + \frac{h_j}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Чтобы определить величины $M_0, M_1, \dots, M_n$, нужно задать два крайних условия на концах отрезка $[a, b]$. Задание наклонов сплайна в точках a и b приводит к аналогу двойной консольной балки. Пусть $S_{\Delta}'(a) = y_0', S_{\Delta}'(b) = y_n'$, тогда

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0' \right), \quad M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}} \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right). \quad (4)$$

Выбор $M_0 = 0, M_n = 0$ соответствует расположению простых опор на концах. Мы будем также рассматривать более общие крайние условия

$$2M_0 + \lambda M_1 = d_0, \quad \mu M_{n-1} + 2M_n = d_n, \quad \mu = 1 - \lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (5)$$

где d_0 и d_n — правые части уравнения (3) при $j = 0$ и $j = n$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и заменим в уравнении (1) функцию $y(x)$ сплайном $S_\Delta(x)$:

$$y(x_i) + \int_a^b K(x_i, t) S_\Delta(t) dt = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

или

$$y_i + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, t) \left\{ M_{j-1} \frac{(x_{j-1} - t)^3}{6h_{j-1}} + M_j \frac{(t - x_{j-1})^3}{6h_{j-1}} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_{j-1}^2}{6} \right) \frac{x_j - t}{h_{j-1}} + \left(y_j - \frac{M_j h_{j-1}^2}{6} \right) \frac{t - x_{j-1}}{h_{j-1}} \right\} dt = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{i0} y_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j + a_{in} y_n = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{i0} &= \frac{1}{h_0} \int_{x_0}^{x_1} K(x_i, t)(x_1 - t) dt + \delta_{i0}, \\ a_{ij} &= \frac{1}{h_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, t)(t - x_{j-1}) dt + \frac{1}{h_i} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, t)(x_{j+1} - t) dt + \delta_{ij}, \\ a_{in} &= \frac{1}{h_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} K(x_i, t)(t - x_{n-1}) dt + \delta_{in}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} d_i &= f_i - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, t) \left\{ \frac{1}{6h_{j-1}} [M_{j-1}(x_j - t)^3 + M_j(t - x_{j-1})^3] - \frac{h_{j-1}}{6} [M_{j-1}(x_j - t) + M_j(t - x_{j-1})] \right\} dt, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Интегралы в формулах (7) определяются точно, если это возможно или вычисляются приближенно. В последнем случае можно каждую функцию $K(x_i, t)$ заменить интерполяционным сплайном и тогда для вычисления этих интегралов потребуется небольшая дополнительная работа.

Поскольку моменты M_j зависят от значений искомой функции y_i , для определения M_j строится итерационный процесс. Положив в первом приближении $M_i = 0, i = 0, 1, \dots, n, I = 0, 1, \dots, n$, решаем систему (6). Это равносильно линейной интерполяции искомой функции

$$y(x) = \frac{x_j - x}{h_{j-1}} y_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}} y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Получившаяся в этом случае система отличается от (6) только правой частью:

в случае линейной интерполяции $d_i = f_i, i = 0, 1, \dots, n$. Решив систему (6), находим первое приближение $y_i^{(1)}$ и подставляя в правой части системы (3) вместо y_i полученные значения $y_i^{(1)}$, решаем ее совместно с краевыми условиями (5) методом прогонки. Полученные значения M_i используется в дальнейшем для уточнения правых частей d_i системы (6). Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i |y_i^{(v)} - y_i^{(v-1)}| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где v – номер итерации, ε – заданное малое число.

x	$a = 1$	$a = 10$	$a = 1000$
-----	---------	----------	------------

Работа алгоритма апробирована на решении следующих модельных задач.

Задача I: Уравнение (1) решается на отрезке $0 \leq t \leq l$ ($0 \leq x \leq l$) при $K(x, t) = xt$, $f(x) = a[x(l-x) + l^4x/12]$. Тогда $y(x) = ax(l-x)$, где a – параметр. Коэффициенты системы (6) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{i0} &= \frac{h_0 x_i}{6} (3x_0 + h_0), \quad i \neq 0; & a_{00} &= \frac{h_0 x_0}{6} (3x_0 + h_0) + 1, \\ a_{ij} &= \frac{x_i}{6} [h_{j-1} (3x_j - h_{j-1}) + h_j (3x_j + h_j)], \quad i \neq j; \\ a_{ii} &= \frac{x_i}{6} [h_{i-1} (3x_i - h_{i-1}) + h_i (3x_i + h_i)] + 1, \\ a_{in} &= \frac{h_{n-1} x_i}{6} (3x_n - h_{n-1}), \quad i = n; & a_{nn} &= \frac{h_{n-1} x_n}{6} (3x_n - h_{n-1}) + 1, \\ d_i &= f_i + \frac{x_i}{360} \sum_{j=1}^n h^3_{j-1} [15(M_{j-1} x_{j-1} + M_j x_j) + 7h_{j-1} (M_{j-1} - M_j)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Задача II: Пусть $K(x, t) = xt$, $y(x) = a \sin \frac{2\pi x}{l}$, тогда $f(x) = y(x) - \frac{al^2}{2\pi} x$.

В этой задаче ядро $K(x, t)$ тот же, что и в задаче I, поэтому коэффициенты системы (6) вычисляются по тем же формулам (9). Системы (6) для этих задач отличаются лишь правыми частями.

Обе задачи решаются при $l = 1$, $n = 10$, $a = 1, 10, 1000$; $\varepsilon = 10^{-3}$.

В таблице 1 сравниваются точные и приближенные решения этих задач. Полученные результаты дают основание рекомендовать данный алгоритм для применения в решении интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316с.

	Точное решение	Приб решение	Погреш в %	Точное решение	Приб решение	Погреш в %	Точное решение	Приб решение	Погреш в %
$y(x) = ax(l - x)$									
0.0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	0
0.1	0.360	0.361	0,27	3.600	3.606	0,16	360.000	360.609	0,16
0.2	0.640	0.641	0,15	6.400	6.412	0,18	640.000	641.218	0,19
0.3	0.840	0.842	0,24	8.400	8.418	0,21	840.000	841.827	0,21
0.4	0.960	0.963	0,31	9.600	9.624	0,25	960.000	962.487	0,25
0.5	1.000	1.003	0,3	10.000	10.030	0,3	1000.000	1003.046	0,30
0.6	0.960	0.964	0,41	9.600	9.637	0,38	960.000	963.655	0,38
0.7	0.840	0.844	0,48	8.400	8.443	0,51	840.000	844.264	0,50
0.8	0.640	0.645	0,78	6.400	6.449	0,76	640.000	644.873	0,76
0.9	0.360	0.365	1,39	3.600	3.655	1,52	360.000	365.482	1,52
1.0	0.000	0.006	0	0.000	0.061	0	0.000	6.091	0
$y(x) = a \sin \frac{2\pi x}{l}$									
0.0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	0
0.1	0.588	0.587	0,17	5.878	5.866	0,20	587.786	586.636	0,19
0.2	0.951	0.949	0,21	9.511	9.488	0,24	951.057	948.757	0,24
0.3	0.951	0.948	0,31	9.511	9.476	0,36	951.055	947.605	0,36
0.4	0.588	0.584	0,68	5.878	5.832	0,78	587.781	583.180	0,78
0.5	0.000	-0.005	0	0.000	0.058	0	-0.007	-5.758	7,14
0.6	-0.588	-0.593	0,85	-5.878	-5.947	1,17	-587.792	-594.693	1,17
0.7	-0.951	-0.958	0,73	-9.511	-9.591	0,84	-951.060	-959.110	0,84
0.8	-0.951	-0.959	0,84	-9.511	-9.603	0,96	-951.053	-960.254	0,96
0.9	-0.588	-0.596	1,36	-5.878	-5.981	1,75	-587.774	-598.125	1,76
1.0	0.000	-0.009	0	0.000	-0.115	0	0.015	-11.485	6,7

Таблица 1

Точные и приближенные решения интегрального уравнения