УДК 512.25; 518.5

М.У.Мурзакматов, Д.С.Абдылдаева

ЫГУ им. К.Тыныстанова

СГЛАЖИВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Разрабатывается алгоритм сглаживания информации, содержащей случайные погрешности, с применением кусочно-кубических сплайн–функций. Алгоритм апробирован на решении модельной задачи.

Интерполяция и сглаживание являются типичными задачами приближения функций. Интерполяция по заданной таблице чисел $(x_i, f(x_i))$, $i=0, 1, \ldots, n$, восстанавливает функцию $f(x)$ с той или иной точностью на отрезке $[a, b]$ действительной оси. Оказывается, выбрав достаточно большое число узлов интерполяции, не всегда можно получить хорошее приближение интерполируемой функции. Чтобы получить хорошее приближение функции, на практике вместо построения интерполяционного многочлена высокой степени, используют интерполяцию кусочными многочленами. Для гладкого восстановления таблично заданной функции нужно увеличить степень составляющих многочленов, а остающиеся свободными коэффициенты определяют из условий гладкого сопряжения многочленов на соседних промежутках. Получающиеся при этом гладкие кусочно-многочленные функции с однородной структурой называются сплайн–функциями или просто сплайнами.

Рассмотрим кубические интерполяционные сплайны. Отрезок $[a, b]$ делится на части точками

$$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и задаются соответствующие ординаты

$$Y: \ y_0, \ y_1, \ \ldots, \ y_n .$$

Ищется функция $S_\Delta(x)$, непрерывная на $[a, b]$ вместе со своими первой и второй производными, совпадающая с кубическим полиномом на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2,\ldots,n)$ и удовлетворяющая условиям

$$S_\Delta(x_i) = y_i, \quad i=0, 1,\ldots, n.$$

Функция $S_\Delta(x)$ называется сплайном относительно сетки Δ или сплайном на Δ, интерполирующим значения y_i в узлах сетки.

Обозначая через M_i “моменты” $S_\Delta''(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, в силу линейности второй производной на $[x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$S_\Delta''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_{i-1}} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, \tag{1}$$

где $h_{i-1}=x_i - x_{i-1}$. Проинтегрируем дважды обе части равенства (1) и, вычислив константы интегрирования, получим [1]

$$S_\Delta(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_{i-1}} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_{i-1}} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h^2_{i-1}}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_{i-1}} + \left(y_i - \frac{M_i h^2_{i-1}}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{2}$$

“Моменты” и значения функции связаны равенствами

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}, \qquad I = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Введя обозначения

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1,$$

условия (3) запишем в виде

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_j}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i=1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Эти уравнения вместе с краевыми условиями образуют систему относительно M_i:

$2M_0 + M_1 = d_0,$

$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad I = 1, 2, \ldots, n-1,$

$M_{n-1} + 2M_n = d_n,$ (5)

где $d_0 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0^{'}\right),$

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$d_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(y_n^{'} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

После вычисления всех M_i, $I = 0, 1, \ldots, n$, значение кубического сплайна в любой точке $x \in [a, b]$ может быть найдено по формуле (2).

На практике часто приходится иметь дело со случаем, когда значения функции, характеризующей какой-то процесс, задаются с некоторой погрешностью. Они могут быть результатами каких-либо измерений и или наблюдений. Пусть на отрезке $[a, b]$ определена некоторая функция $f(x)$ и в точках сетки Δ известны ее приближенные значения $\tilde{f}_i$, $I = 0, 1, \ldots, n$. Тогда, если погрешности $\varepsilon_i = f(x_i) - \tilde{f}_i$ носят случайный характер, причем они могут оказаться большими в некоторых точках, то применение обычной интерполяции приводит к большой погрешности, т.е. интерполирующая функция сильно отличается от функции $f(x)$. В частности, график сплайна обычно имеет резко выраженные осцилляции. Поэтому возникает необходимость построить сплайн, проходящий вблизи заданных значений, но более “гладкий“, чем интерполяционный. Такие сплайны называются сглаживающими, а процедура их построения – сглаживанием.

Сглаживающие сплайны возникают при решении задач о минимизации функционала [2, 3]

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{-1}(f_i - \tilde{f}_i)^2, \tag{6}$$

где $\rho_i > 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ − весовые коэффициенты, с помощью которых можно регулировать степень близости функции к заданным значениям $\tilde{f}_i$.

Решением вариационной задачи (6) является кубический сплайн $S_\Delta(x)$, удовлетворяющий граничным условиям

$$S_\Delta''(a) = S_\Delta''(b) = 0. \tag{7}$$

Так как кубический сплайн однозначно определяется множеством значений f_i, $I = 0, 1, \ldots, n$, принимаемых в узлах x_i, $I = 0, 1, \ldots, n$, то минимизация $J(f)$ сводится к нахождению минимума от переменных $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

Принимая во внимание равенство (1), где $M_i = S_\Delta(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad M_0 = M_n = 0$ и подставляя в (6) в место $f''(x)$ выражение (1), приходим к задаче минимизации функционала

$$J(f) = (BM, M) + \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{-1}(f_i - \tilde{f}_i)^2 . \tag{8}$$

Здесь B – квадратная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h_0}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-3}}{6} & \frac{h_{n-3}+h_{n-2}}{3} & \frac{h_{n-2}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{n-1}}{3} \end{pmatrix},$$

а M и f – векторы – столбцы:

$$M = (M_0, M_1, \dots, M_{n-1})^T, \quad f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)^T.$$

Поскольку матрица B симметричная со строгим диагональным преобладанием, а вектор M линейно выражается через $f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)$, функционал $J(f)$ есть положительно определенная форма от f, поэтому она имеет минимум. Применяя необходимое условие минимума функции

$$\frac{\partial J}{\partial f_i} = 0, \ i = 0, 1, \dots, n,$$

приходим к матричному уравнению

$$H^T M + R^{-1} f = R^{-1} \tilde{f}, \tag{9}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_0}\left(-\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & \cdots & 0 & 0 \\ & \frac{1}{h_1}\left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h_{n-3}}\left(-\frac{1}{h_{n-3}} - \frac{1}{h_{n-2}}\right) & \\ 0 & 0 & \cdots & & \frac{1}{h_{n-2}}\left(-\frac{1}{h_{n-2}} - \frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{pmatrix},$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Умножая уравнение (9) слева на HR, получим

$$HRH^T M + Hf = H\tilde{f}.$$

Учитывая, что по определению кубических сплайнов $BM = Hf$, окончательно получаем, что

$$(B + HRH^T)M = H\tilde{f}. \tag{10}$$

Матрица системы (10) пятидиагональна, симметрична и положительно определена, в силу чего она имеет единственное решение, которое можно найти методом прогонки. Выпишем в развернутом виде систему (10):

$$a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 = d_0,$$

$$b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = d_1,$$

$$c_{i-2} M_{i-2} + b_{i-1} M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} + c_i M_{i+2} = d_i, \tag{11}$$

$$i = 2, 3, \cdots, n-2,$$

$$c_{n-3} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + a_{n-1} M_{n-1} + b_{n-1} M_n = d_{n-1},$$

$$c_{n-2} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} + a_n M_n = d_n,$$

где

$$a_i = \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{h^2_{i-1}} \frac{1}{\rho_{i-1}} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)^2 \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{h_i^2} \frac{1}{\rho_{i+1}},$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{12}$$

$$b_i = \frac{1}{6} h_i - \frac{1}{h_i}\left[\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\frac{1}{\rho_i} + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\frac{1}{\rho_{i+1}}\right],$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-2,$$

$$c_i = \frac{1}{h_i h_{i+1}} \frac{1}{\rho_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-3,$$

$$d_i = \frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i}{h_i} - \frac{\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Если сглаживающий сплайн $S_\Delta(x)$ удовлетворяет условиям $S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$, то

$$a_0 = a_n = 1, \; b_0 = c_0 = c_{n-2} = b_{n-1} = d_0 = d_n = 0. \tag{13}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (11) решаем методом прогонки. Решение этой системы ищем в виде

$$M_{i-2} = \alpha_{i-2} M_{i-1} + \beta_{i-2} M_i + \gamma_{i-2}, \quad i = 2, 3, 4, \cdots, n. \tag{14}$$

Прогоночные коэффициенты α_i, β_i, γ_i определяются по формулам

$$\alpha_i = -[(c_{i-2}\alpha_{i-2} + b_{i-1})\beta_{i-1} + b_i] / A_{i,}$$

$$\beta_i = -c_i / A_{i,} \tag{15}$$

$$\gamma_i = [d_i - (c_{i-2}\alpha_{i-2} + b_{i-1})\gamma_{i-1} - c_{i-2}\gamma_{i-2}] / A_{i,}$$

где $A_i = (c_{i-2}\, \alpha_{i-2} + b_{i-1})\alpha_{i-1} + c_{i-2}\beta_{i-2} + \alpha_i$, *I = 2, 3, …, n-2.*

Для проведения расчетов по формулам (15) необходимо иметь значения $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$ которые находятся из первых двух уравнений системы (11) и уравнений (14) при *I = 2* и *I = 3* и из условий (13) :

$$\alpha_0 = -\frac{b_0}{a_0} = 0, \quad \beta_0 = -\frac{c_0}{a_0} = 0, \quad \gamma_0 = \frac{d_0}{a_0} = 0,$$

$$\alpha_1 = -\frac{b_1}{a_1}, \quad \beta_1 = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \gamma_1 = \frac{d_1}{a_1}. \tag{16}$$

Используя формулы (16), по формулам (15) определяются $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \quad i = 2, 3,..., n-2$. Значения M_{n-1} и M_n находятся из последних двух уравнений системы (11) и уравнений (14) при $I = n$ и $I = n$-1:

$$M_n = 0, \quad M_{n-1} = \frac{d_{n-1} - c_{n-3}(\alpha_{n-3}\gamma_{n-2} + \gamma_{n-3}) - b_{n-2}\gamma_{n-2}}{c_{n-3}(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2} + \beta_{n-3}) + b_{n-2}\alpha_{n-2} + a_{n-1}}. \tag{17}$$

Остальные значения M_i, $i = n-2, \; n-3,..., 1, 0$ вычисляются по формулам (14). После вычисления M_i из системы (11) величины f_i определяются соотношениями

$$f_i = \tilde{f}_i - \rho_i D_i, \quad i = 0, 1,..., n, \tag{18}$$

где

$$D_0 = \frac{1}{h_0}(M_1 - M_0),$$

$$D_i = \frac{1}{h_i}(M_{i+1} - M_i) - \frac{1}{n_{i-1}}(M_i - M_{i-1}), \quad i = 1, 2,..., n-1,$$

$$D_n = -\frac{1}{h_{n-1}}(M_n - M_{n-1}).$$

Алгоритм сглаживания информации апробирован на решении следующей модельной задачи. В качестве сглаживаемой функции берем возмущенные значения синусоиды

$$y(x) = a\sin\frac{2\pi x}{l}.$$

Задаем $l = 2\pi$; $n = 11, 21, 31, 41, 51$; $\rho_i = \{1/m\}$, $m = 1, 2, 3,…,10$; $I = 1,…,n$.

Подвергаем значения функции $y(x)$ случайным возмущениям по формуле [4]

$$\tilde{y}(x_i) = y(x_i) \quad [1 + \varepsilon(\xi_i - 0{,}5)]. \tag{19}$$

Здесь ε характеризует уровень погрешности, ξ_i – реализация случайной величины с равномерным распределением на [$0,1$].

На рис. 1 и 2 показаны точные, возмущенные и сглаженные значения функции $y(x)$ при $a = 1$, $a = 10$ соответственно.

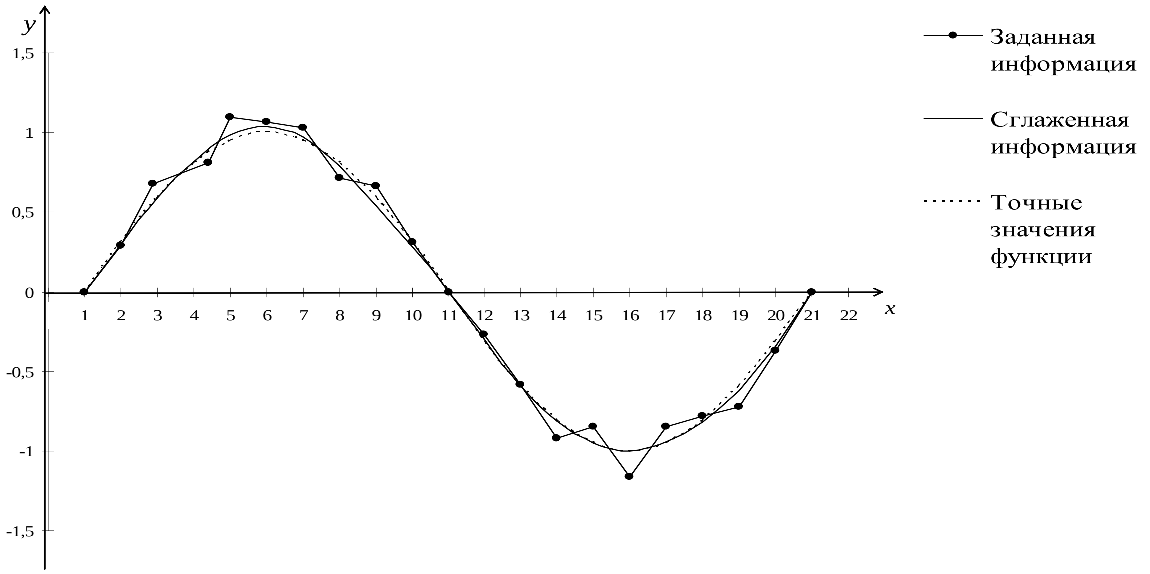

Рис. 1. Сглаживание информации при a=1

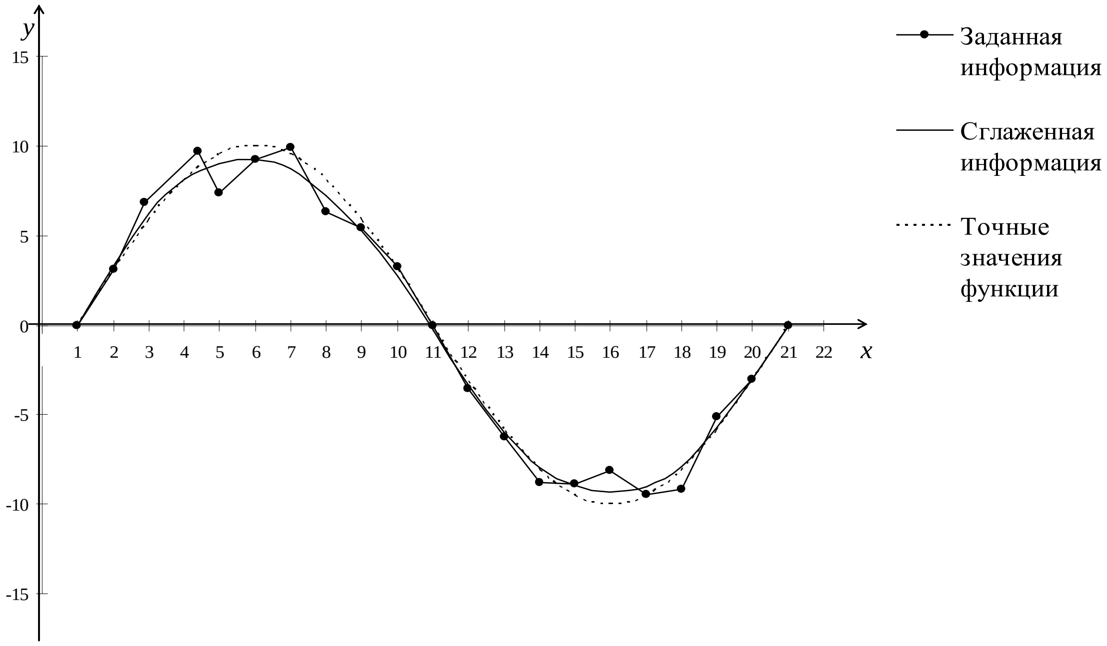

Рис. 2. Сглаживание информации при a=10

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316с.
2. Марчук Г.И.Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 535с.
3. З.Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн–функций. – М.: Наука, 1980. – 350с.
4. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336с.