УДК 532.546+518.5

Мурзакматов М У., Исабеков К А.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ БАЗИСОВ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Для разработки теоретически обоснованных рекомендаций по осуществлению мер, связанных с рациональным и экономичным использованием, охраной от истощения и загрязнения запасов подземных вод, а также для прогнозирования их режима с учетом естественных и искусственных факторов необходимо изучать динамику подземных вод в пространственной постановке.

Нестационарная фильтрация подземных вод в пространственной области описывается уравнением [3]:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H}{\partial z}\right) = W , \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in V,\ t > 0$$

с начальным

$$H(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in V \quad (2)$$

и граничными условиями,

$$k\frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha , \quad (x,y,z)\in \Sigma,\ t>0 \quad (3)$$

где $\mu=\mu(x,y,z)$ - коэффициент упругоемкости породы;
$\varphi=\varphi(x,y,z)$ - начальное распределение напоров; V - область фильтрации, Σ - ее граница; $\vec{n}=(cos(n,x),cos(n,y),cos(n,z))$ - внешняя нормаль к границе.
$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x}cos(n,x)+\frac{\partial}{\partial y}cos(n,y)+\frac{\partial}{\partial z}cos(n,z)$ - производная по внешней нормали к границе области.

Задачу (1) - (3) решаем численно с помощью метода конечных элементов. Для этого область V разбиваем на m тетраэдральных элементов.

В качестве базисных функций используем частные решения следующего однородного нестационарного уравнения

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right), \quad (4)$$

которые имеют вид

$$N_i(x,y,z,t) = e^{-3it}\, cos\nu_i u , \qquad i=1,2,... \quad (5)$$

где $u = x+y+z , \quad \nu_i=\sqrt{i\mu/k}$.

С помощью этих базисов образуем функции формы

$$F_s(x,y,z) = a_s + b_s\, cos\nu_1 u + c_s\, cos\nu_2 u + d_s\, cos\nu_3 u , \quad (6)$$
$$s = i, j, k, l$$

и в элементе (e) искомую функцию $H(x,y,z,t)$ аппроксимируем функцией

$$H^{(e)}(x,y,z,t) = H_i(t)F_i^{(e)}(x,y,z) + H_j(t)F_j^{(e)}(x,y,z) +$$
$$+ H_k(t)F_k^{(e)}(x,y,z) + H_l(t)F_l^{(e)}(x,y,z) ,$$

а приближенное решение начально-краевой задачи (1) - (3) ищем в виде

$$H_n(x,y,z,t)=\sum_{e=1}^{m} H^{(e)}(x,y,z,t)=\sum_{e=1}^{m}[H_i\,(t)F_i^{(e)}(x,y,z)+H_j\,(t)F_j^{(e)}(x,y,z)+$$

$$+H_k\,(t)F_k^{(e)}(x,y,z)+H_l\,(t)F_l^{(e)}(x,y,z)]=\sum_{r=1}^{n} H_r(t)F_r(x,y,z). \qquad (7)$$

Здесь

$$H_i^{(e)}=H^{(e)}(x_i,y_i,z_i,t), \qquad H_j^{(e)}=H^{(e)}(x_j,y_j,z_j,t),$$

$$H_k^{(e)}=H^{(e)}(x_k,y_k,z_k,t), \qquad H_l^{(e)}=H^{(e)}(x_l,y_l,z_l,t).$$

Для приближенного решения задачи образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1, 2,.$.Подставляя в задаче (1) - (3) вместо $H(x,y,z,t)$ функцию $H_n(x,y,z,t)$ из формулы (7) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем [4,6]:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i(LH_n - W)dv = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Sigma F_i(lH_n-\alpha)d\sigma\,, \quad i=1,2,\ldots,n, \qquad (8)$$

где

$$L = \mu\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$l = k\left[\frac{\partial}{\partial x}cos(n,x)+\frac{\partial}{\partial y}cos(n,y)+\frac{\partial}{\partial z}cos(n,z)\right].$$

Первое слагаемое в левой части формулы (8) преобразуется следующим образом :

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i\mu\frac{\partial H_n}{\partial t}dv = \sum_{j=1}^{n}\iiint_V \mu F_i \int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}[H_j(t)F_j(x,y,z)]dtdv =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\iiint_V \mu(x,y,z)F_i(x,y,z)F_j(x,y,z)dv\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial H_j(t)}{\partial t}\partial t=\sum_{j=1}^{n}M_{ij}H_j^s-\sum_{j=1}^{n}M_{ij}H_j^{(s-1)},$$

где

$$M_{ij}=\iiint_V \mu(x,y,z)F_i(x,y,z)F_j(x,y,z)dv\,,\, H_j^s=H(x_j,y_j,z_j,t_s)\,,$$

$$H_j^{s-1}=H(x_j,y_j,z_j,t_{s-1}).$$

К остальным слагаемым объемного интеграла в равенстве (8) применяем первую формулу Грина. Имеем

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt\iiint_V F_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H_n}{\partial z}\right)\right]dv=$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t)dt\iiint_V F_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial F_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H_j}{\partial z}\right)\right]dv=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}[\sigma H_j(t_s)+(1-\sigma)H_j(t_{s-1})]\Delta t_s\iiint_V k\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{\partial F_j}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{\partial F_j}{\partial y}+\frac{\partial F_i}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial z}\right)dv-$$

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \sigma H_j(t_s) N_{ij} \Delta t_s +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\sigma) H_j(t_{s-1}) N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt .$$

Здесь $0 < \sigma \le 1$,

$$N_{ij} = \iiint_V k\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial z}\right) dv,$$

$$k_i = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) k(x, y, z) \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma .$$

В правой части формулы (8) получаем

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i (l H_n - \alpha) d\sigma = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i \left(k \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha\right) d\sigma dt =$$

$$= -\int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z)(\beta F_j H_j + \alpha) d\sigma dt = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} [\sigma B_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} + (1-\sigma) B_{ij}^{(s-1)} H_j^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^{n} [\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s ,$$

где

$$B_{ij} = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t) d\sigma ,$$

$$A_i = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t) d\sigma .$$

Подставляя полученные выражения в равенство (8), получаем СЛАУ относительно неизвестных $H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H_j^{(s)} = b_i , \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (9)$$

где

Таблица 1

Точные и приближенные значения напоров

z, м	Расст. от оси l	*30 сут*		*180 сут*		*360 сут*		Отн. погр. в %
		Точные значения Прибл.значения		Точные значения Прибл. значения		Точные значения Прибл.значения		
		Лин.базис	Нелин.базис	Лин.базис	Нелин.базис	Лин.базис	Нелин.базис	
0	*3000 м*	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	
		988.03	990.01	980.00	975.00	975.00	970.00	3.0
	2000 м	979.45	979.45	876.71	876.71	753.43	753.42	
		967.70	968.68	861.81	867.94	733.09	730.06	3.1
	1000 м	967.12	967.12	802.74	802.74	605.48	605.48	
		962.29	960.35	792.30	878.49	586.71	589.13	3.1
50	*3000 м*	999.90	999.90	999.39	999.38	998.74	998.77	
		989.00	980.00	974.40	979.39	963.81	966.81	3.5
	2000 м	979.35	979.35	876.10	876.10	752.19	752.19	
		970.54	964.66	852.44	851.32	731.88	729.62	3.3
	1000 м	967.02	967.02	802.12	802.12	604.25	604.25	
		957.35	958.32	786.08	788.48	582.52	625.78	3.7
100	*3000 м*	999.59	999.59	997.54	997.53	995.07	995.07	
		982.60	972.60	970.61	968.60	954.27	955.27	4.0
	2000 м	979.04	979.04	874.24	874.25	748.49	748.49	
		954.56	956.52	849.77	848.02	722.28	717.80	4.1
	1000 м	966.71	966.71	800.27	800.27	600.55	600.55	
		959.94	959.94	781.86	784.26	581.93	583.13	3.1

$$a_{ij} = M_{ij} + (N_{ij}^{(s)} - \sigma B_{ij}^{(s)})\Delta t_s \,,$$

$$b_i = [\sigma W_i^{(s)} + (1-\sigma)W_i^{(s-1)}]\Delta t_s + \sum_{j=1}^{n}\{[M_{ij} - (1-\sigma)B_{ij}^{(s-1)}\Delta t_s]H_j^{(s-1)} +$$

$$+[\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma)A_i^{s-1}]\Delta t_s\},$$

$$W_i = \iiint_V F_i(x,y,z)W(x,y,z,t)dv \,.$$

Система уравнений (9) решается шаг за шагом при значениях $s=1,\ 2$. При $s=1$ вместо $H^{(0)} = H(x,y,z,0)$ берется начальное распределение напоров из условия (2) и находятся значения функции H при $t = t_1$. Используя полученную функцию

$H^{(1)} = H(x,y,z,t_1)$ в качестве начальных условий, вычисляются значения функции $H^{(2)} = (x,y,z,t_2)$ и т. д. На каждом временном слое матрица системы (9) является симметричной с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решать одним из точных методов (например, методом Гаусса).

Пример. В качестве тестового примера рассмотрим неустановившееся движение подземных вод в водоносном горизонте мощностью $m=100$ *м* и с коэффициентом фильтрации $k=10$ *м/сут*. Область фильтрации представляет собой прямой круговой цилиндр радиуса $r=3000$ *м*, на боковой поверхности которого задано краевое условие $k\dfrac{\partial H}{\partial n} - \beta\, H = \alpha$, с $\alpha = 0$ *м/сут*, $\beta = -\dfrac{3}{500 + 5\cdot 10^{-5} z^2}$ *(1/сут)*, а на верхней и нижней основаниях – условие непроницаемости $\dfrac{\partial H}{\partial n} = 0$. Считаем, что перетоков из выше- и нижележаъих пластов нет, т.е $Q = 0\ (1/\text{м}\cdot\text{сут})$ и

$$f = -10^{-3} + 5\cdot 10^{-5}(9\cdot 10^6 - x^2 - y^2 + z^2)\ (1/сут).$$

В данном случае напорная функция имеет вид

$$H(x,y,z,t) = H_0 - \varepsilon_0(l^2 - x^2 - y^2 + 10z^2)\cdot t\,,$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-6}/73$, а t измеряется в сутках.

В табл. 1. приведены точные и приближенные значения напоров в различные моменты времени в точках, расположенных на оси цилиндра (узлы № 20,59,98) и на расстояниях *1000 м* (узлы № 14,53,92), *2000 м* (узлы № 9,47,48,86,87), *3000 м* (узлы № 2,3,5,41,42,44,80,81,83) от оси цилиндра на глубине $z=0$ *м*, $z=50$ *м*, $z=100$ *м*. Причем в первом столбце даны значения полученные с применением линейного базиса, а во втором столбце-с применением нелинейного базиса.

Из сравнения данных видно, что значения почти одинаковые. Но применение нелинейного базиса имеет преимущество в плане экономии памяти ЭВМ и упрощения сеточной области. В реальных условиях область фильтрации разбивается на крупные фрагменты. В табл. 1. приводятся результаты в одном и том же узле, полученные применением различных базисов. Поэтому применение нелинейного базиса при решении подобных задач имеет не только теоретический, но и весьма значительный практический интерес.

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977. -664 с.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. -Бишкек: Илим, 2005. -180 с.