

ОДНООСНОЕ СЖАТИЕ ОБРАЗЦА С ТРЕНИЕМ НА ТОРЦАХ

На основе разработанной методики в условиях плоской деформации и в упругопластической постановке рассмотрена задача одноосного сжатия образца горных пород с трением на торцах.

Деформации горных пород около выработок на современных глубинах разработки в основном протекают за пределами прочности. При этом при решении задач геомеханики большое значение имеет учет таких запредельных свойств горных пород, как разрыхление и разупрочнение (снижение сопротивляемости). Результаты экспериментальных исследований поведения горных пород на жестком прессе стимулировали интенсивное развитие теоретических методов расчета проявлений горного давления в выработках. Обобщение закономерностей запредельного деформирования и введение их в условия прочности привело к статически неопределимым задачам. Математические модели, отражающие основные закономерности поведения разупрочняющихся материалов, рассмотрены в работе [1,2]. Эти модели в условиях плоской деформации реализованы на ЭВМ в виде численных процедур, обеспечивающих выполнение заданных законов состояния с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Получаемые решения должны удовлетворять трем требованиям механики сплошной среды:

- а) условиям совместности деформаций;
- б) рассчитанное поле напряжений вместе с заданными контурными и массовыми силами должно обеспечивать равновесие области;
- в) в каждом элементе напряжение и деформации должны удовлетворять закон состояния. Выполнение этих требований является гарантией правильности получаемых решений.

Первое из этих требований выполняется в МКЭ автоматически, поскольку элементы в узловых точках сохраняют связь.

Выполнение второго и третьего требований рассмотрим более детально на простом примере одноосного сжатия образца с трением на торцах. Ввиду наличия двух осей симметрии рассматривается только четверть области (рис.1а). Оси симметрии в процессе деформирования не искривляются, и вдоль осей симметрии отсутствуют касательные напряжения. Трём верхним узлам заданы перемещения вниз, равные 0.018. Свойства элементов: $E=100$ МПа, $\nu=0.3$, $\gamma=0$, $c=0.1$ МПа, $\phi=30^\circ$.

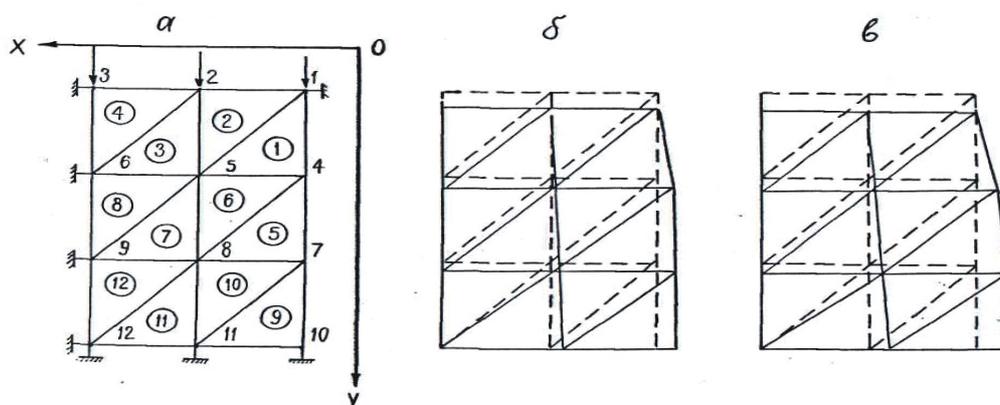


Рис. 1 Тестовая задача:

а - расчетная схема; б - форма образца после нагружения при ассоциированном законе течения; в - форма образца в разупрочняющейся среде.

Задача решена по разработанной программе [1] в двух вариантах: в первом варианте закон состояния подчиняется ассоциированному закону течения; во втором – рассматривается разупрочняющаяся среда с коэффициентом дилатации $\lambda=3$. На рис. 1б и

1в показаны формы деформированного образца, полученные в результате расчета на ПК. Для проверки условий равновесия по формуле (1) рассчитываются узловые силы по всей области и выдаются на печать

$$\{ F \} = \Delta [A]^{-1T} [B]^T \{ \sigma \}, \quad (1)$$

где $\{ F \} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$ - вектор узловых сил,

$\{ \sigma \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ - вектор напряжений,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} - \text{ матрица координат узлов,}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{ матрица выборки}$$

Для обеспечения равновесия эти силы должны быть равны по величине и противоположны по направлению заданным внешним силам, а в тех узлах, где внешних сил не задано, – равны нулю. В целом сумма узловых сил, приложенных к области, в направлениях x и y для обеспечения равновесия должна быть равна нулю. При решении каждой конкретной задачи проверкой было установлено выполнение условия равновесия.

Для проверки выполнения закона состояния нами предусмотрен вывод на печать не только найденных фактических напряжений в элементах, но и “теоретических” напряжений, вычисляемых по формулам для принятого закона состояния и найденным деформациям. Качество решения может быть оценено по близости значений фактических и теоретических напряжений по рис. 2а и 2б, где изображены паспорта прочности среды и фактические напряжения в элементах (точки). В элементах 2 и 4 вычисленные деформации ϵ_1 и ϵ_3 меньше, чем предельная упругая деформация для данного напряжения σ_3 , поэтому они находятся в упругом состоянии. Остальные элементы находятся в



неупругом состоянии. Из рис. 2а, б и из результатов расчета следует, что закон состояния удовлетворяется по заданной точности, соосность главных напряжений и деформаций выдерживаются. Далее проверим выполнение заданного закона течения, например, на элементе № 10. Напряжения в элементе равны: $\sigma_1=4.9$, $\sigma_3=0.39$, а деформации: $\epsilon_1=0.0070$, $\epsilon_3=-0.0097$.

Рис. 2. Напряженное состояние в элементах:
а - при ассоциированном законе течения; б - в разупрочняющейся среде.

При плоской деформации по закону Гука упругие составляющие деформаций при таких напряжениях составляют: $\epsilon_1^y = 0.0043$, $\epsilon_3^y = -0.0016$. Соответственно, пластические компоненты равны:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^p &= \epsilon_1 - \epsilon_1^y = 0.0027 & (2) \\ \epsilon_3^p &= \epsilon_3 - \epsilon_3^y = -0.0081 \end{aligned}$$

Как видим, соотношение пластических компонентов деформации

$$\lambda = |\epsilon_3^p / \epsilon_1^p| = (0.0081 / 0.0027) = 3 \quad (3)$$

точно равно заданному (ассоциированному) закону течения, характеризующему $\lambda = 3$.

В рассмотренных задачах найденное решение является единственным. В принципе решение пластической задачи может быть не единственным: например, растяжение идеально-пластического стержня нагрузкой, равной пределу текучести материала, не будет иметь единственного решения. В то же время растяжение этого стержня до заданной деформации будет иметь единственное решение.

Чтобы выяснить независимость результатов решений от числа шагов, рассматриваемый пример решен в 5 шагах нагружения. В этом случае программа делила заданное перемещение на 5 частей и в пять ступеней его наращивала. После каждого приращения осуществлялся итерационный процесс до достижения заданной точности. Сопоставление результатов в 1 и в 5 шагов показывает их идентичность.

Нами при разработке процедуры начальных напряжений установлена хорошая сходимость процесса к точному решению. Это подтверждается вышеупомянутыми примерами и рассмотренными задачами. Условием сходимости процесса является то, что с каждым шагом итерация величины $\{\sigma^n\}$ уменьшалась (рис. 3), а нагрузка передавалась на элементы, напряженно-деформированное состояние которых еще характеризуется ветвью упрочнения на графике $\sigma - \epsilon$. Если таких элементов способных принять на себя избыток нагрузки с разупрочняющихся элементов, в области уже нет, а приложенная к области нагрузка не уменьшается по мере деформирования области, то величина начальных напряжений цикл за циклом будет не снижаться, а возрастать.

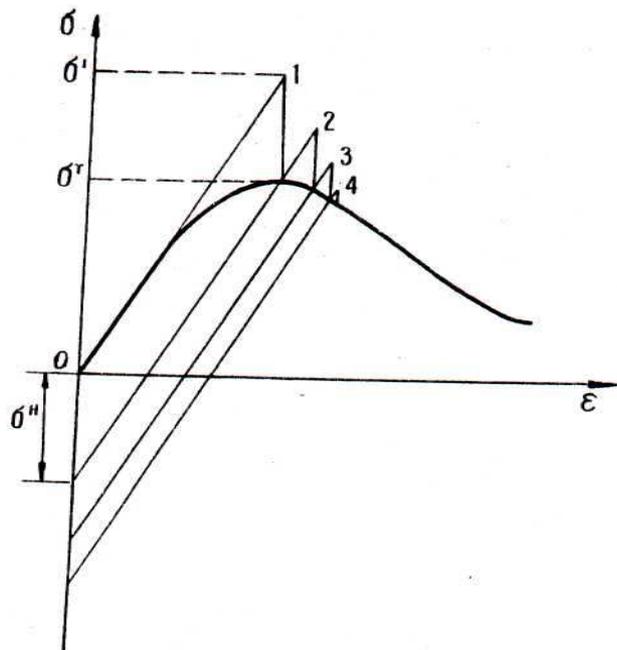


Рис. 3. График к объяснению последовательного приближения с использованием процедуры начальных напряжений

Задача не будет иметь решения, процесс итерации станет не сходящимся.

Процедура начальных напряжений, как показывают программы, разработанные нами, является универсальной. С нею можно решать задачи с учетом разрыхления и разупрочнения горных пород за пределами упругости. Полные диаграммы (“голограф” состояния) аппроксимируются линейными функциями. Разумеется, возможна аппроксимация другими линейными и нелинейными функциями, в том числе и таблично заданными.

В приводимых программах модуль запредельного спада принят по абсолютной величине меньшим, чем модуль упругости E . Отметим, что в разработанной нами программе, заменяя группу операторов, можно задавать величину $|M|$ и больше чем E .

Разрыхления в запредельной области в программе учитываются введением коэффициента $\lambda = |\varepsilon_3^p / \varepsilon_1^p|$. Количество потребных итераций, т.е. скорость получения решения, зависит от величины коэффициента дилатации λ и заданной точности. Нами решены задачи при коэффициенте $\lambda = 1 \div 6$, относительной погрешности

$$|\{\sigma_i^\phi\} - \{\sigma_i^T\}| / \{\sigma_i^T\} < 0.10 \quad (4)$$

Такой погрешностью обладают некоторые элементы пластической зоны, прилегающие к контуру выработки; с удалением от контура погрешность существенно снижается вплоть до 0.5%. Поэтому при решении сложных задач рекомендуется взять коэффициент $\lambda = 1 \div 6$, что обеспечивает быструю сходимость решений.

Литература:

1. Абдылдаев Э.К. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи выработок. - Фрунзе: Илим, 1990. –164 с.
2. Абдылдаев Э.К. Численный метод конечных элементов.- Алматы: Эверо, 2009. – 156 с.