**К.ТЫНЫСТАНОВ атындагы ЫСЫК-КӨЛ
МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ**

Колдонмо математика кафедрасы

Мурзакматов М.У., Исабеков К.А.

Сызыктуу программалоо маселелерин симплекс - метод менен чыгаруу

«Колдонмо математика жана информатика» адистигинин студенттери үчүн методикалык колдонмо

Каракол – 2010

УДК 519.8
ББК 22.18
М 91

ЫМУнун Окуу-методикалык бирикмеси (19.11.2009-ж. №3 токтому), Окумуштуулар кеңеши (24.12.2009-ж. №4 токтому) тарабынан басмага сунуш кылынды.

Рецензент: физ.-мат. илим. доктору, профессор У.М.Туганбаев.

Мурзакматов М.У., Исабеков К.А.

М 91 Сызыктуу программалоо маселелерин симплекс – метод менен чыгаруу. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. /К.Тыныстанов атын. ЫМУ. – Каракол: 2010. –20 б.

ISBN 978 – 9967 – 431 – 72 – 0

Усулдук колдонмодо симплекс – методдун алгоритми жана мисалдар каралган. Бул колдонмо биринчи иретте студенттердин методду өз алдынча өздөштүрүүлөрүнө жана практикалык маселелерди чыгарууда аларга жардам көрсөтүүгө арналат.

М 1602110000 – 09
ISBN 978-9967-431-72-0

УДК 519.8
ББК 22.18

Сызыктуу программалоо маселелери математикалык программалоо маселелеринин эң жөнөкөй жана эң жакшы өздөштүрүлгөн бөлүгүн түзөт.Сызыктуу программалоо маселелерин чыгаруунун негизги методу болуп симплекс – метод эсептелет.

§1. Сызыктуу программалоо маселелеринин геометриялык сүрөттөлүшү

Сызыктуу программалоонун *жалпы маселесинде максат функциясы* деп аталуучу

$$< c, x > = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

сызыктуу функциянын экстремумун (минимумун же максимумун) табуу талап кылынат, мындагы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ өзгөрмөлөрү төмөнкү сызыктуу барабарсыздыктар жана барабардыктар түрүндөгү чектөөлөргө баш ийүүгө тийиш:

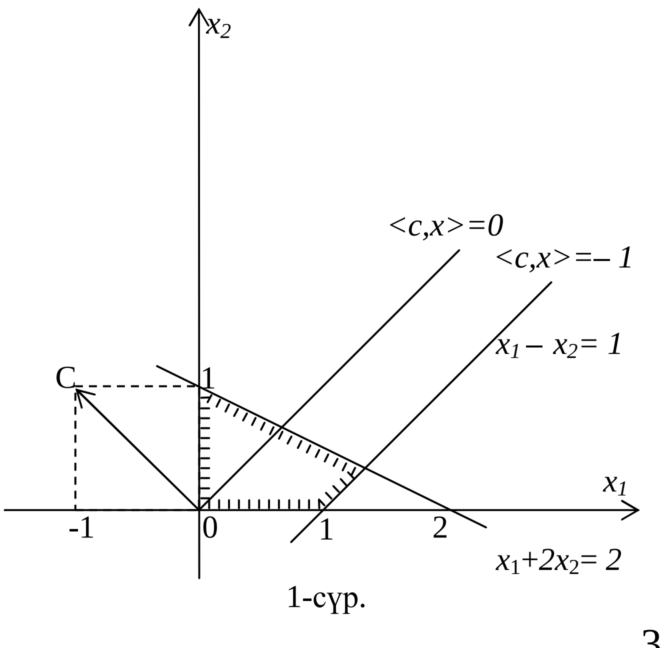
$$\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \ i = 1,2,\ldots,k_1, \\ & a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j, \ j = k_1+1,\ldots,k_2, \\ & a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \ l = k_2+1,\ldots,k_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Айрым учурларда чектөөлөр жалаң барабардыктар түрүндө ($k_1 = k_2 = 0$ болгондо), же жалаң барабарсыздыктар түрүндө ($k_2 = k_3$ болгондо) болушу мүмкүн. Көп учурларда өзгөрмөлөр $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ шарттарын канагаттандырышат. Сызыктуу программалоо маселелеринде чектөөлөр сөзсүз болууга тийиш, себеби чектөөлөр жок болгон учурда (1) функция минимумга да, максимумга да ээ болбойт.

Мисалы:

$$\begin{aligned} & < c,x > = -x_1 + x_2 \to min; \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

маселесинде x_1, x_2 эки өзгөрмө, барабарсыздык түрдөгү эки чектөө жана өзгөрмөлөрдүн терс эместик шарттары бар. Маселенин чектөөлөрү жалпак төрт бурчтукту аныктайт (1-сүрөт). Минималдануучу максат функциясынын деңгээл сызыктары, б.а.

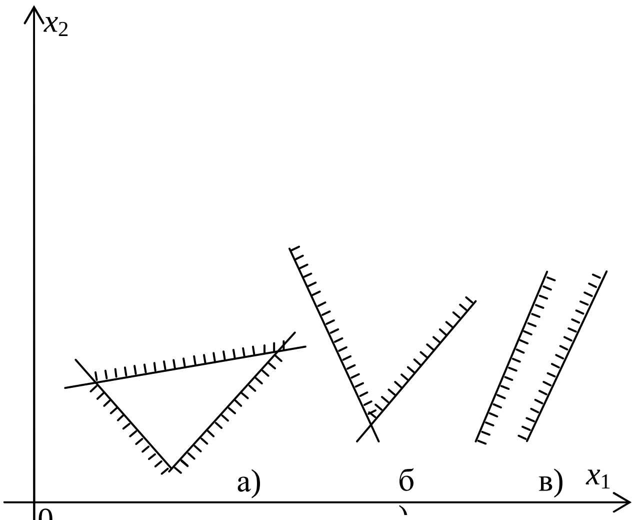


1-сүр.

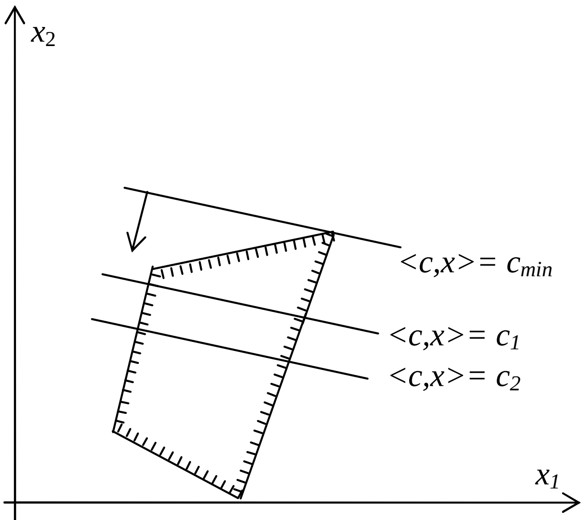
$$< c, x > = -x_1 + x_2 = const$$

барабардыгынын канагаттандыруучу чекиттердин көптүгү $c = (-1, 1)$ градиент-векторго перпендикуляр түз сызыктардын түркүмүн түзүшөт. (1-сүрөттө $c = 0$ жана $c = -1$ маанилерине ылайык келүүчү эки деңгээл сызыгы көрсөтүлгөн). Биз максат функциясынын төрт бурчтуктагы минималдык маанисин табышыбыз керек. Мындай маани деңгээл сызыгы менен төрт бурчтуктун кесилишиндеги c градиентинин кемүү багыты боюнча эң четки чекити болууга тийиш. Бул маани $x_1 - x_2 = 1$ түз сызыгында жатат. Демек, максат функциясынын минималдык мааниси –1 ге барабар жана ал аталган түз сызыктын төрт бурчтукка тиешелүү бөлүгүндө алынат. Минимум чекиттеринин арасында төрт бурчтуктун эки чокусу бар экендигин белгилей кетели

Жогоруда келтирилген мисалда сызыкуу чектөөлөр жалпак төрт



2-сүр.



3-сүр.

бурчтукту туюндурат. Эки өзгөрмөлүү маселелердин мүмкүн болуучу чыгарылыштарынын көптүгү 2-сүрөттө көрсөтүлгөндөй, куру көптүк (а), же чектелбеген көптүк (б,в), же бир да чокусу жок фигура (в) болушу мүмкүн. Мүмкүн болуучу чыгарылыштардын көптүгү чектелген жалпак көп бурчтук болгон учурда максат функциясынын минимум чекиттеринин арасында бул көп бурчтуктун эң жок дегенде бир чокусунун сөзсүз болушу геометриялык сүрөттөлүшүнөн келип чыгат. (3-сүр).

Сызыктуу программалоонун экиден көп өлчөмдүү маселелеринин геометриялык сүрөттөлүшү эки өлчөмдүү маселеге аналогиялуу. (2) – чектөөлөр чектүү сандагы жарым мейкиндиктердин жана гипертегиздиктердин кесилишинен пайда болгон, *көп грандык көптүк* деп аталуучу областты аныктайт. Ал көптүк томпок жана туюк болот. Айрым учурларда ал куру же чектелбеген көптүк болушу мүмкүн. Көп грандыктын чокуларынын саны чектелүү болгондуктан сызыктуу программалоо маселелерин чыгаруунун жолу төмөнкүдөй болушу мумкун. Адегенде көп грандыктын бардык чокулары аныкталат, андан кийин бул чокулардын арасынан максат функциясы минимумга же максимумга ээ болгон чоку тандалып алынат. Бирок реалдуу маселелерде көп грандуу көптүктүн чокулары өтө көп болгондуктан аларды бирден талдап чыгуу эң көп убакытты талап кылат. Ошондуктан оптималдуу эмес чокуларды текшербестен эле чокуларды максатка ылайыктуу тезирээк тандоо үчүн *симплекс – метод* деп аталган ыкма ойлонуп чыгарылган. Ал ыкма сызыктуу программалоонун канондук маселесин чыгарууга ылайыкталган.

§ 2. Сызыктуу программалоонун канондук маселеси

$<c, x>$ максат функциясынын максималдоо – $<c, x>$ функциясынын минималдоо маселесине тең кучтө болгондуктан, биз мындан ары минималдоо маселелерин карайбыз.

Симплекс – методдун эң жөнөкөй версиясы сызыктуу программалоонун *канондук* деп аталуучу

$$\begin{aligned} &< c,x > \to min; \\ &Ax = b, \\ &x \geq 0_n \end{aligned} \qquad (1)$$

маселесин чыгарууга ылайыкталган. Мында $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ – *максат функциясынын коэффициеттеринин вектору*; $A = (a_{ij}) - k \times n$ өлчөмдүү тик бурчтуу матрица, ал *чектөөлөрдүн коэффициенттеринин матрицасы* деп аталат; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^T$ – *чектөөлөрдүн вектору*; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – *өзгөрмөлөрдүн вектору*.

Кеңири түрдө канондук маселе төмөнкүдөй жазылат:

$$\begin{aligned} &c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to min; \\ &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \\ &x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Сызыктуу программалоонун ар кандай маселесин канондук түргө келтирүүгө болот. Мисалы, барабарсыздык түрдөгү

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

чектөөнү терс эмес кошумча өзгөрмөсүн киргизип,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad (3)$$

түрдө жазууга болот. Эгерде баштапкы барабарсыздык түрдөгү чектөөнүн сол жагы оң жагынан чоң же барабар болсо, анда ага тиешелүү барабардык түрдөгү (3) чектөөдөгү кошумча өзгөрмөнүн белгисин карама-каршыга өзгөртүү керек.

Эгерде x_j өзгөрмөсүнө терс эместик шарты коюлбаган болсо, аны терс эмес x'_j жана x''_j өзгөрмөлөрүнүн айырмасына алмаштырууга болот:

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j' \geq 0, \quad x_j'' \geq 0.$$

Канондук маселени мындайча коюуга да балот:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \Lambda + a_{kn}x_n = b_k \end{aligned} \qquad (4)$$

сызыктуу теңдемелер системасынын терс эмес чыгарылыштарынын арасынан $<c, x>$ максат функциясына минималдык маани берүүчү чыгарылышты тандап алуу керек. Эгерде (4) системанын чыгарылышы жок болсо, б.а биргелеш эмес болсо, же терс эмес чыгарылыштары жок болсо, анда (2) канондук маселенин да чыгарылышы жок. Эгерде (4) системанын жалгыз гана терс эмес чыгарылышы болсо, анда ал оптималдык чыгарылыш болот. (4) системанын терс эмес чыгарылыштарынын саны бирден көп болгондо гана (2) маселени оптималдоо жөнүндө сөз болушу мумкун.

(4) системада «ашык» теңдемелер жок деп эсептейбиз, анда бул системанын рангы теңдемелердин санына барабар: $rang\ A = k$.

§3. Симплекс – методдун алгоритми

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруунун негизги методу болуп белгисиздерди удаалаш четтетүү методу (Гаусс методу) эсептелет. Ал методдун негизинде төмөнкү элементардык өзгөртүп түзүүлөр жатаары белгилүү:

а) кандайдыр бир теңдемени нөлгө барабар эмес санга көбөйтүү;

б) эки теңдемени мүчөлөп кошуп, алардын бирөөнү алынган сумма менен алмаштыруу;

в) эки теңдеменин орундарын алмаштыруу.

Бул элементардык өзгөртүп түзүүлөр берилген системанын чыгарылыштарынын көптүгүн өзгөртпөйт.

Эми канондук маселеге кайрылалы:

$$y = <c, x>$$

максат функциясын

$$Ax = b, \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

чектөөлөрүн канааттандыргандай кылып минималдоо керек. Мындагы $Ax = b$ ($rang\ A = k < n$) теңдемелер системасын адегенде элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 \qquad + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \tag{2}$$

түргө келтиребиз, мында $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$ болсун деп эсептейбиз. Мындай өзгөртүп түзүү оор болгон учурлар кийинчерээк каралат.

(2) системанын бардык k теңдемелерин тиешелүү түрдө $c_1, c_2, \ldots, c_k$ сандарына көбөйтүп, алардын баарын $y - <c, x> = 0$ теңдемесине кошобуз. Анда y үчүн теңдемеде $x_1, x_2, \ldots, x_k$ өзгөрмөлөрү болбойт (бош мүчө пайда болушу мүмкүн). $y = x_0,\ \ b_i = a_{i0}\ \ (i = 1, 2, \ldots, k)$ деп белгилеп, x_0 үчүн теңдемени (2) система менен кошо жазабыз:

$$\begin{aligned} x_0 \qquad + a_{0,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{0n}x_n &= a_{00}, \\ x_1 + a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= a_{10}, \\ x_2 + a_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{2n}x_n &= a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}x_n &= a_{ko}. \end{aligned} \tag{3}$$

мында

$$a_{oj} = \sum_{m=1}^{k} c_m a_{mj} - c_j, \quad j = k+1, \ldots, n,$$

$$a_{00} = \sum_{m=1}^{k} c_m b_m.$$

(3) система $x_0, x_1, \ldots, x_k$ өзгөрмөлөрүнө карата *диоганалдык форма* деп аталат, же система *диоганалдык түргө* келтирилген деп атайбыз. Эгерде (3) системада (x_0 ду камтыган биринчи теңдемеден башка теңдемелерде) $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ десек, анда

$$x_i = a_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{4}$$

болот. Бул *базистик чыгарылыш* деп, ал эми $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – *базистик өзгөрмөлөр* деп аталат. Биз мурда b чектөөлөр векторунун компоненталары терс эмес болсун дегенбиз, ошондуктан базистик чыгарылыш мүмкүн болуучу чыгарылыш болот. Эгерде $a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{ko}$ сандарынын арасында нөлдөр болсо, анда базистик чыгарылыштын тиешелүү компоненталары нөлгө барабар. Эң жок дегенде бир базистик компонентасы нөл болгон базистик чыгарылыш *кубулган базистик чыгарылыш* деп аталат.

Базистик өзгөрмөлөр – сөзсүз эле биринчи k номерлүү өзгөрмөлөр эмес. Базистик чыгарылыш түшүнүгү рангы k га барабар болгон ар кандай A матрицалуу $Ax = b$ теңдемелер системасы үчүн да колдонулат. Матрицаны анын мамычаларынын вектору деп эсептөөгө болот. Матрицанын мамычаларынын номерлери менен өзгөрмөлөрдүн номерлеринин арасында өз-ара бир маанилүү ылайык келүүчүлүк бар. Базистик чыгарылышты эми мындай аныктоого болот: Эгерде $Ax = b$ системасынын $x = (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)$ нөлдүк эмес чыгарылышынын нөл эмес компоненталарына ылайык келүүчү мамыча векторлору сызыктуу көз каранды эмес болсо, анда мындай чыгарылыш *базистик чыгарылыш* деп аталат. Эгерде базистик чыгарылыштын компоненталары терс эмес болсо, ал *мүмкүн болуучу базистик чыгарылыш* деп аталат. Демек бул аныктама боюнча (3) системанын (4) чыгарылышы базистик чыгарылыш болот, себеби анын $x_1, x_2, \ldots, x_k$ компоненталары гана нөл эмес болушу мүмкүн, аларга сызыктуу көз каранды эмес

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

мамычалары ылайык келет.

(3) системаны төмөнкүдөй таблица түрүндө жазабыз.

1-таблица

		x_1	x_2	…	x_k	x_{k+1}	…	x_n
x_0	a_{00}	0	0	…	0	$a_{0,k+1}$	…	a_{0n}
x_1	a_{10}	1	0	…	0	$a_{1,k+1}$	…	a_{1n}
x_2	a_{20}	0	1	…	0	$a_{2,k+1}$	…	a_{2n}
……	…	…	…	…	…	…	…	…
x_k	a_{k0}	0	0	…	1	$a_{k,k+1}$	…	a_{kn}

1 – таблицанын ар бир сабы (3) системанын бир теңдемесине ылайык келет. Таблицанын сол жаккы эң четки мамычасына базистик өзгөрмөлөр, андан кийинки (номери нөл) мамычага теңдемелердин бош мүчөлөрү жазылган. Базистик өзгөрмөлөргө (x_1, x_2,…, x_k га) ылайык келүүчү мамычалар бирдик матрицаны түзүшөт. Бул таблица *симплекс-таблица* деп аталат.

Эсептөөнүн жүрүшүндө базистик өзгөрмөлөр орун алмашат, алар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ топтомунан бирден алынып турат. Базистик өзгөрмөлөргө ылайык келүүчү мамычалар бирдик матрицанын мамычаларынын орун алмашуусунан алынат. Агымдагы базистик чыгарылышта базистик өзгөрмөлөрдүн маанилери симплекс – таблицанын нөлдүк мамычасынын элементтерине, ал эми базистик эмес өзгөрмөлөрдүн маанилери нөлгө барабар.

Эми симплекс – методдун алгоритмин карайбыз. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ топтомунан алынган k өзгөрмөлөргө карата диоганалдык түргө келтирилген симплекс-таблица түзөбүз, анын нөлүнчү мамычасынын элементтери терс эмес болуусу керек (a_{00} элементи ар кандай болушу мүмкүн).

1-кадам. Эгерде таблицанын нөлүнчү сабынын (a_{00} дөн башка) бардык элементтери оң эмес болсо, анда эсеп токтотулат, себеби агымдагы базистик чыгарылыш – оптималдуу жана максат функциясынын минималдык мааниси a_{00} гө барабар. Ушундай абалга ылайык келген таблица *оптималдуу таблица* деп аталат. Эгерде таблица оптималдуу эмес болсо, анда нөлүнчү саптын (a_{00} дөн башка) оң элеметтеринин арасынан бирөө (эң чоңу) тандалып алынат. Мисалы, $a > 0$ элементин тандап алдык дейли, анда s номерлуу мамыча *жетектөөчү мамыча* деп аталат.

Эгерде таблицанын нөлүнчү сабынын (a_{00} дөн башка) бардык элементтери оң эмес болсо, анда максат функциясынын нөлүнчү теңдемеден табылган мааниси $x_0 = a_{00} - \sum a_{00j} x_j$ га барарбар, мындагы x_j – базистик эмес өзгөрмөлөр (базистик өзгөрмөлөр жок, себеби алардын коеффициенттери нөлгө барабар). Демек мааниси базистик эмес өзгөрмөлөрдөн гана көз каранды. Базистик эмес өзгөрмөлөр терс эмес, алардын коеффициенттери a_{0j} оң эмес болгондуктан базистик эмес өзгөрөмөлөр нөл болгондо гана x_0 минималдык маанини алат. Демек, $x_0 = a_{00}$ саны чындыгында эле максат функциясынын эң кичине мааниси, ал эми агымдагы базистик чыгарылыш – оптималдуу болот.

2-кадам. Жетектөөчү мамычанын a_{is} оң элементтеринин арасынан a_{i0} / a_{is} катышы эң кичине болгондоюн тандап алабыз. Бул элемент a_{rs} болсун, ал *жетектөөчү элемент*, r – *жетектөөчү сап* деп аталат.

2 - кадамды аткаруу үчүн жетектөөчу s – мамычада эң жок дегенде бир оң элемент бар болушу керек. Эгерде бир дагы оң элемент болбосо (a_{0s} тен башка), анда берилген маселенин чектүү чыгарылышы жок (максат функциясы мүмкүн болуучу көптүктө төмөн жагынан чектелген эмес). Мисалы, $s = n$ жана $a_{in} \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$ болсун. Анда каалаган $\lambda \ge 0$ үчүн

$$x_i^{(\lambda)} = a_{i0} - a_{in}\lambda,\ \ i = 1,2,\ldots,k,$$
$$x_i^{(\lambda)} = 0,\ \ i = k+1,\ldots,n-1,$$
$$x_n^{(\lambda)} = \lambda$$

сандары мүмкүн болуучу чыгарылыш болот, себеби $a_{i0} \geq 0$ (алар базистик өзгөрмөлөрдүн маанилери), $a_{in} \leq 0$ (биздин божомол боюнча), $i = 1, 2, \ldots, k$ болгондуктан алар теңдемелер системасын канааттандырат жана алардын компоненталары терс эмес. 1 – таблицанын нөлүнчү сабынан

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j^{(\lambda)} = a_{00} - a_{0n}\lambda$$

маанисин алабыз. $a_{0n} > 0$ болгондуктан λ ны чоңойтуу менен максат функциясынын мааниси x_0 дү чексиз кичирейтүүгө болот.

2 – кадамдагы эсептөөлөрдө a_{i0}/a_{is} ($a_{is} > 0$) катышы i нин бир нече маанилеринде бирдей минимумга ээ болуп калышы, б.а. бир нече сап жетектөөчү болуп калышы мүмкүн. Бул учурда эң кичине номерлүү сапты жетектөөчү сап кылуу сунушталат, бирок бул ыкма *айлампанын* чыгуусунун, б.а. бир эле базистик чыгарылыштын чексиз кайталана берүүсүнүн теориялык мүмкүнчүлүгүн жоё албайт. Айлампаны болтурбаш үчүн төмөнкүдөй ыкманы колдонуу керек.

s – мамыча жетектөөчү болсун жана a_{i0}/a_{is} катышы l – сап үчүн минимумга ээ болсун:

$$\min_{l} \frac{a_{i0}}{a_{ls}} = \frac{a_{r_1 0}}{a_{r_1 s}} = \frac{a_{r_2 0}}{a_{r_2 s}} = \ldots = \frac{a_{r_l 0}}{a_{r_l s}}$$

Эгерде $l = 1$ болсо, анда жетектөөчү сап бир маанилүү аныкталат, ал r_1 номерлүү сап. Эгерде $l > 1$ болсо, анда a_{i1}/a_{is} катышын $i = r_1, r_2, \ldots, r_l$ үчүн эсептейбиз жана бул катыш минимумга ээ болгон саптарды табабыз. Эгерде мындай сап бирөө эле болсо, аны жетектөөчү кылып алабыз. Мындай болбосо a_{i2}/a_{is} катышы минималдуу болгон саптарды аныктайбыз ж.б. Бул процесс чексиз созулбайт, жетектөөчү сап бир маанилүү аныкталат.

3-кадам. Элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуп, жетектөөчү элемент a_{rs} ти бирге, жетектөөчү мамычанын калган элементтерин нөлгө айландырабыз. Башка сөз менен айтканда, базистик өзгөрмөлөрдүн жаңы топтомуна карата системаны диагоналдык түргө өзгөртүп түзөбүз. Жаңы топтомдун эскиден айырмасы – эски топтомдогу x_r өзгөрмөсүнүн ордуна x_s өзгөрмөсү катышат. Ошондуктан таблицанын сол жагында x_r өзгөрмөсун x_s ке алмаштырабыз. Андан кийин 1 – кадамга келебиз.

1 – 3 – кадамдарды удаалаш аткаруу симплекс – методдун бир итерациясын түзөт. Итерациялар таблицанын нөлдүк сабындагы (a_{00} дү эсептебегенде) бардык элементтер оң эмес болгучакты аткарыла берет. Ушул шарт аткарылганда агымдагы базистик чыгарылыш оптималдык чыгарылыш болот, ал эми максат функциясынын минималдык мааниси таблицанын сол жаккы жогорку элементине барабар болот.

Эгерде максат функциясы мүмкүн болуучу көптүктө төмөн жагынан чектелбеген болсо, анда 2 – кадамдын биринде бир дагы элементи оң эмес (нөлдүк саптын элементин эсептебегенде) жетектөөчү мамыча алынат.

1-эскертүү. Симплекс – методдун алгоритминин маанилүү касиети – чектүү сандагы итерацияларды аткаргандан кийин же оптималдык чыгарылыш алынат, же маселенин чыгарылышынын жок экендиги айкындалат.

Чындыгында эле, канондук маселеде ар кандай базистик чыгарылыштардын (мүмкүн болуучу көп грандык көптүктүн чокуларынын) саны чектелүү – ал c_n^k санынан ашпайт. Ошондуктан, эгерде баштапкы маселенин чыгарылышы бар болсо, анда көп грандыктын чокуларынын эң жок дегенде бирөө оптималдык болот. Кубулма эмес маселеде чектүү сандагы чокуларды удаалаш сыноо аркылуу оптималдык чоку табылат. Эгерде маселе кубулма болсо (б.а. айлампалуу болсо), анда айлампаны тыюу эрежесин колдонуп (ал жөнүндө кийинчерээк айтылат), акыр аягында оптималдуу чокуга келебиз. Эгерде баштапкы маселенин оптималдык чыгарылышы жок болсо, анда 2 – кадамдагы бирөөндө бир дагы оң элементи жок багыттоочу мамыча келип чыгат, бул – максат функциясынын чектелбегендигин көрсөтөт.

2-эскертүү. Симплекс – методдун ар бир итерациясында базистик чыгарылыштын мүмкүн болуучулугу сакталат, б.а. нөлдүк мамычанын (жогоркусунан башка) элементтери ар дайым терс эмес болушат. Бул касиет 2 – кадамда жетектөөчү сапты тандоо эрежесинен келип чыгат,

Мындан тышкары, мүмкүн болуучу базистик чыгарылыштын биринен экинчисине өткөндө максат функциясынын мааниси (сол жаккы жогорку бурчтагы элемент) азаят. Чындыгында эле, эгерде 1 – таблицада жетектөөчү болуп a_{rs} элементи тандалып алынса, анда 3 – кадамды аткаргандан кийин таблицанын сол жаккы жогорку клеткасында $a_{00} - (a_{r0} / a_{rs}) a_{0s}$ айырмасы орун алат, ал сан a_{r0}, a_{rs}, a_{0r} коэффициенттери оң болгондуктан a_{00} санынан кичине болот. Бул айырма максат функциясынын жаңы мааниси болуп саналат. Мындай абал базистик чыгарылыш кубулма болгондо гана, б.а. айлампа пайда болгондо гана бузулушу мүмкүн.

Симплекс – методдун алгоритминин иштөөсүн төмөнкү мисалды чыгарууда көрөлү:

$$x_0 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to min,$$
$$x_1 \quad + 2x_4 - x_5 + x_6 = 1,$$
$$x_2 \quad + x_5 + x_6 = 2,$$
$$x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0.$$

Баштапкы мүмкүн болуучу базистик чыгарылыш үчүн $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = x_5 = x_6 = 0$ маанилерин алабыз. Баштапкы таблица нөлүнчү тендемени башка теңдемелер менен кошкондон кийин 2 – таблицадай түргө ээ болот.

2 – таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	4	0	0	0	2	0	2
x_1	1	1	0	0	2	– 1	1^*
x_2	2	0	1	0	0	1	1
x_3	1	0	0	1	– 1	1	–1

Нөлүнчү сапта оң элеметтер бар, ошондуктан агымдагы чыгарылыш оптималдуу эмес. Оң элементтердин экөө барабар, алардын бирин, мисалы, $a_{06} = 2$ элементин тандап алабыз. Демек акыркы мамыча жетектөөчү болот. Бул мамычада эки оң элемент бар: $a_{16} = a_{26} = 1$. $a_{01} / a_{16} = 1$ жана $a_{20} / a_{26} = 2/1 = 2$ катыштарын салыштырып, алардын кичинесин алабыз. Демек биринчи сап жетектөөчү болот, ал эми $a_{16} = 1$ элементи жетектөөчү элемент болот (таблицада ал жылдызча менен белгиленген). Ушуга байланыштуу x_1 өзгөрмөсүн базистен чыгарып, анын ордуна x_6 ны киргизүү керек. Ал үчүн 2 – таблицанын биринчи сабын удаалаш –2 ге, –1 ге, 1 ге көбөйтүп, алынган саптарды тиешелүү түрдө нөлүнчү, экинчи жана үчүнчү саптарга кошобуз. Натыйжада жетектөөчү мамычанын (бирге барабар болгон жетектөөчү элементтен башка) элементтери нөлгө барабар болот жана симплекс – таблица экинчи итерацияда 3 – таблицадагыдай түргө келет.

3 – таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	2	– 2	0	0	– 2	2	0
x_6	1	1	0	0	2	– 1	1
x_2	1	– 1	1	0	– 2	2^*	0
x_3	2	1	0	1	1	0	0

Мындагы нөлүнчү сапта жалгыз гана оң элемент $a_{05} = 2$ бар, демек жетектөөчү мамыча бир маанилүү аныкталат. Ошондой эле жетектөөчү элемент да бир маанилүү аныкталат: $a_{25} = 2 > 0$. Демек x_2 өзгөрмөсү базистен чыгарылып, анын ордуна x_5 өзгөрмөсү киргизилет. Ал үчүн жетектөөчү саптын бардык элементтерин (жетектөөчү элементин бирге барабар болуш үчүн) 2 ге бөлөбүз жана элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен жетектөөчү мамычанын калган элементтерин нөлгө айландырабыз. Жыйынтыгында 4 – таблицаны алабыз, анын нөлүнчү сабында ($a_{00} = 1$ элементин эсептебегенде) оң элементтер жок, демек бул таблица оптималдуу болуп эсептелет, агымдагы базистик чыгарылыш $x_1 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = 2,\ x_5 = 0{,}5,\ x_6 = 1{,}5$ оптималдык чыгарылыш болот, ал эми максат функциясынын минималдык мааниси бирге барабар.

4 – таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	1	– 1	– 1	0	0	0	0
x_6	1.5	0.5	0.5	0	1	0	1
x_5	0.5	– 0.5	0.5	0	– 1	1	0
x_3	2	1	0	1	1	0	0

§4. Эки фазалуу симплекс – метод

Жогоруда симплекс – методдун алгоритми сызыктуу программалоонун канондук маселесине ылайыкталып формулировкаланды. Анда баштапкы маселе x_0 жана кандайдыр бир k базистик өзгөрмөлөргө карата диагоналдык түргө келтирилген деп эсептедик жана бардык теңдемелердин бош мучөлөрү (нөлүнчү теңдемеден башкаларыныкы) терс эмес деп божомолдодук. Бул божомолдор аткарылбаган учурларда эмне кылуу керек экендигин көрөлү. Бош мүчөлөрү терс эмес болгон каалагандай канондук маселени диагоналдык түргө келтирүү үчүн алдын ала кошумча өзөрмөлөрдү киргизүү менен жогоруда баяндалган симплекс – методдун алгоритмин пайдаланууга болот.

Сызыктуу программалоонун жалпы түрдөгү канондук маселесин чыгаруу керек болсун:

$$
\begin{aligned}
&y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min;\\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k,\\
&\quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Теңдемелердин бош мүчөлөрү $b_1, b_2, \ldots, b_k$ терс эмес деп эсептейбиз (бош мүчөсү терс болгон теңдемени -1 ге көбөйтүп коюуга болот). *Rang A = k* шартынын аткарылышы милдетүү эмес.

Жасалма өзгөрмөлөр деп аталуучу $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ терс эмес кошумча өзгөрмөлөрдү киргизип, жаңы маселени карайбыз:

$$
\begin{aligned}
&z = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k} \to min,\\
&y - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0,\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad\qquad = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad\quad = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \qquad\qquad\qquad + x_{n+k} = b_k,\\
&x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+k} \geq 0.
\end{aligned}
$$

$z - x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+k} = 0$ теңдемесине $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ өзгөрмөлөрүн камтыган теңдемелерди кошуп, жаңы системаны алабыз:

$$
\begin{aligned}
&d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n + z \qquad\qquad\qquad = z_0,\\
&-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \qquad + y \qquad\qquad = 0,\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \qquad x_{n+1} \qquad = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \qquad\qquad\qquad + x_{n+k} = b_k,\\
&x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \geq 0,
\end{aligned}
$$

мында

$$
d_m = \sum_{i=1}^{k} a_{im}, \quad m = 1, 2, \ldots, n; \quad z_0 = \sum_{m=1}^{k} b_m .
$$

(2) система $z, y, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ өзгөрмөлөрүнө карата диоганалдуу түрдө (мында *y* өзөрмөсү терс маанилерди да алышы мүмкүн).

(2) системага мурунку параграфта баяндалган симплекс методду колдонууга болот. Бардык жасалма өзгөрмөлөр терс эмес, ошондуктан $z = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}$ функциясынын минималдык мааниси нөлгө барабар: $z_{min} = 0$. Демек, эгерде чектөөлөрдүн баштапкы системасы

$$Ax = b, \qquad x \geq 0_n \tag{3}$$

биргелеш болсо, анда $z_{min} = 0$ мааниси алынат, анда бардык жасалма өзгөрмөлөр нөлгө барабар болууга тийиш. Алардын ордуна базистик өзгөрмөлөргө $x_1, x_2, \ldots, x_n$ көптүгүнүн айрым элементтери кирет. Анда z турган сапты чийип таштап y ти минималдоого киришүү керек. Баштапкы канондук маселени чыгаруунун ушундай жолу *эки фазалуу симплекс - метод* деп аталат. Биринчи фазада z функциясын минималдап, базистен бардык жасалма өзгөрмөлөрдү чыгарабыз, экинчи фазада y максат функциясы минималданат жана баштапкы маселенин оптималдык чыгарылышы аныкталат.

Биринчи фазада кезигүүчү учурларга кеңирирээк токтололу.

1) Эгерде (2) системаны чыгарууда $z_{min} > 0$ экендиги аныкталса, анда чектөөлөрдүн (3) системасы биргелеш эмес.

2) Эгерде $z_{min} = 0$ болсо жана симплекс таблицанын сол жагында бир дагы жасалма өзгөрмө болбосо, анда экинчи фазага өтүү керек.

3) Эгерде $z_{min} = 0$ болсо, бирок таблицанын сол жагында жасалма өзгөрмөлөр да турса, анда элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен аларды базистен чыгарып, алардын ордуна баштапкы өзгөрмөлөрдү киргизүү керек. Бул учурда базистик чыгарылыш кубулма болот (базистин компоненталарынын арасында нөлдөр бар). Эгерде бардык $j = 1, 2, \ldots, n$ үчүн $a_{rj} = 0$ болгондуктан x_{n+r} жасалма өзгөрмөсүн базистен чыгаруу мүмкүн эмес болсо, анда бул (1) системанын r – теңдемеси "ашык " экендигин көрсөтөт, андыктан ал теңдемени таблицадан сызып таштоо керек.

Симплекс – методдун биринчи фазасын төмөнкү мисалдан көрүүгө болот:

$$\begin{aligned}
&y = x_1 - x_2 + 1 \to min;\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1,\\
&x_1 - 3x_2 + x_3 = -3,\\
&x_1 + 11x_2 + 3x_3 = 11,\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Экинчи теңдемени –1 ге көбөйтөбүз жана жасалма x_4, x_5, x_6 өзгөрмөлөрүн киргизип, биринчи фаза үчүн маселе түзөбүз:

$$\begin{aligned}
&z - x_4 - x_5 - x_6 = 0,\\
&y - x_1 + x_2 \qquad = 1,\\
&\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1,\\
&-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 3,\\
&x_1 + 11x_2 + 3x_3 + x_6 = 11.
\end{aligned}$$

Биринчи теңдемеден жасалма өзгөрмөлөрдү четтетип, төмөнкү системаны алабыз:

$$\begin{aligned}
&z + 2x_1 + 15x_2 + 5x_3 && = 15,\\
&y - x_1 + x_2 && = 1,\\
&\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 && = 1,\\
&\quad -x_1 + 3x_2 - x_3 + \qquad x_5 && = 3,\\
&\quad x_1 + 11x_2 + 3x_3 + \qquad x_6 && = 11
\end{aligned}$$

жана бул система үчүн таблица түзөбүз.

5- таблица

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	15	2	15	5	0	0	0
y	1	– 1	1	0	0	0	0
← x_4	1	2	1^*	3	1	0	0
x_5	3	– 1	3	– 1	0	1	0
x_6	11	1	11	3	0	0	1

Экинчи мамычаны жетектөөчү кылып тандап алабыз. 1/1, 3/3, 11/11 катыштарын салыштырып, акыркы үч саптын ар бири жетектөөчү боло алат деген жыйынтыкка келебиз. Жетектөөчү үчүн номери эң кичине сапты алабыз. Демек базистеги x_4 өзгөрмөсүн x_2 менен алмаштыруу керек. Тиешелүү өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин 6 – таблицага келебиз.

6 – таблица

		x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
z	0	– 28	0	– 40	0	0
y	0	– 3	0	– 3	0	0
x_2	1	2	1	3	0	0
← x_5	0	– 7*	0	– 10	1	0
x_6	0	21	0	– 30	0	1

Базистен чыгарылган x_4 өзгөрмөсүнө тиешелүү төртүнчү мамычанын эми кереги жок, ошондуктан ал таблицадан алынып ташталды. 6 – таблицадан көрүнүп тургандай, z тин эң кичине мааниси нөлгө барабар, бирок x_5 жана x_6 жасалма өзгөрмөлөрү базистен чыгарыла элек. x_5 өзгөрмөсүн базистен чыгарабыз. x_5 сабынын x_1 ге жана x_3 кө тиешелүү элементтери терс, ошондуктан ал сапты –1 ге көбөйтөбүз (мындай жасоого мүмкүн, себеби бул саптын нөлүнчү мамычасындагы элемент нөлгө барабар). x_5 тин ордуна x_1 ди кийиребиз, ал үчүн жетектөөчү саптын элементтерин 7 ге бөлөбүз жана элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен жетектөөчү мамычанын элементтерин нөлгө айландырабыз. Алынган натыйжа 7 – таблицада көрсөтүлгөн.

7 – таблица

		x_1	x_2	x_3	x_6
Z	0	0	0	0	0
Y	0	0	0	9/7	0
x_2	1	0	1	1/7	0
x_1	0	1	0	10/7	0
x_6	0	0	0	0	1

x_6 өзгөрмөсүн базистен чыгарууга мүмкүн эмес, себеби ал саптын бардык элементтери нөлгө барабар. Демек үчүнчү теңдеме “ ашык” болуп эсептелет. Жогорку (z) жана төмөнкү (x_6) саптарды жана акыркы (x_6) мамычаны алып таштап, симплекс – методдун экинчи фазасына өтүү керек.

Айлампаны жоюу эрежеси

Эгерде симплекс – методдун алгоритминин 2 – кадамдарынын биринде жетектөөчү сап бир маанилүү аныкталбаса, анда айлампа келип чыгышы мүмкүн, б.а. бир эле базистик чыгарылыш чексиз кайталана берет. Мындай айлампаны болтурбай коюунун эрежесин көрөбүз

s – мамыча жетектөөчү катарында тандалып алынган болсун жана

$$\min_{a_{is}>0} \frac{a_{i0}}{a_{is}} = \frac{a_{r_1 0}}{a_{r_1 s}} = \frac{a_{r_2 0}}{a_{r_2 s}} = \Lambda = \frac{a_{r_l 0}}{a_{r_l s}}$$

шарттары аткарылсын. Эгерде $l = 1$ болсо, анда жетектөөчү сап бир маанилүү аныкталат. Ал – r_1-сап. Эгерде $l > 1$ болсо $a_{i1}/a_{is}, i = r_1, r_2, \mathrm{K}, r_l$ катыштарын эсептейбиз жана бул катыштын эң кичине маанисине туура келген сапты табабыз. Эгерде мындай сап жалгыз гана болсо, анда ал жетектөөчү болот. Мындай болбосо катыштардын эң кичине маанисине туура келген саптар үчүн a_{i2}/a_{is} катыштарынын эң кичине маанисине туура келген саптарды тандап алабыз.ж.б.у.с. Натыйжада жетектөөчү сап бир маанилүү аныкталат.

§5. Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

1. $x_1 - x_2 \to max,$
$-x_1 + x_2 \geq 8,$
$8x_1 + 5x_2 \leq 80,$
$x_1 - 2x_2 \leq 2,$
$x_1 + 4x_2 \geq 4,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

2. $7x_1 + x_2 \to max,$
$x_1 + x_2 \leq 14.$
$3x_1 - 5x_2 \leq 15,$
$5x_1 + 3x_2 \geq 21,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

3. $7x_1 - x_2 \to min,$
$x_1 + x_2 \geq 3,$
$5x_1 + x_2 \geq 5,$
$x_1 + 5x_2 \geq 5,$
$0 \leq x_1 \leq 4,$
$0 \leq x_2 \leq 4.$

4. $x_1 + x_2 \to min,$
$3x_1 + x_2 \geq 8,$
$x_1 + 2x_2 \geq 6,$
$x_1 - x_2 \leq 3,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

5. $x_1 + 3x_2 \to max,$
$-x_1 + x_2 \leq 3,$
$4x_1 + 3x_2 \leq 20,$
$x_1, x_2 \geq 0,$

6. $2x_1 + x_2 \to max,$
$x_1 - x_2 \geq 4,$
$x_1 + x_2 \geq 10,$
$4x_1 - x_2 \leq 12,$
$7x_1 + x_2 \leq 7,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

7. $2x_1 + 2x_2 \to max,$
$3x_1 - 2x_2 \geq -6,$
$x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1 \leq 3,$
$x_2 \leq 5,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

8. $2x_1 - 4x_2 \to max,$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16,$
$x_1 + 3x_2 \geq 2,$
$2x_1 + 7x_2 \leq 9,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

9. $-3x_1 + 6x_2 \to min,$
$5x_1 - 2x_2 \leq 4,$
$x_1 - 2x_2 \geq -4,$
$x_1 + x_2 \geq 4,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

10. $3x_1 + 3x_2 \to max,$
$x_1 + x_2 \leq 8,$
$3x_1 + 7x_2 \geq 21,$
$x_1 + 2x_2 \geq 6,$
$0 \leq x_1 \leq 1,$
$0 \leq x_2 \leq 1.$

11. $x_1 + x_2 \to max,$
$x_1 + x_2 \geq 1,$
$-5x_1 + x_2 \leq 0,$
$-x_1 + 5x_2 \geq 0,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

12. $x_1 + x_2 \to max,$
$5x_1 - 2x_2 \leq 7,$
$-x_1 + x_2 \leq 5,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

13. – $2x_1 + x_2 \to min,$
$2x_1 + x_2 \leq 8,$
$x_1 + 3x_2 \geq 6,$
$3x_1 + x_2 \geq 3,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$

14. –$2x_1 + x_2 \to min,$
$2x_1 + x_2 \leq 8,$
$x_1 + x_2 \leq 6,$
$-3x_1 + 2x_2 \geq 3,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

15. – $3x_1 + x_2 \to min,$
$x_1 + 2x_2 \geq 10,$
$3x_1 + x_2 \geq 15,$
$x_1 \leq 8,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

16. $2x_1 + 2x_2 \to max,$
$3x_1 - 2x_2 \geq -6,$
$x_1 + x_2 \geq 3,$
$0 \leq x_1 \leq 9,$
$0 \leq x_2 \leq 6.$

17. $x_1 + 2x_2 \to max,$
$x_1 + x_2 \leq 4,$
$3x_1 + x_2 \geq 4,$
$x_1 + 5x_2 \geq 4,$
$0 \leq x_1 \leq 3,$
$0 \leq x_2 \leq 3.$

18. $x_1 + 2x_2 \to max,$
$5x_1 - 2x_2 \leq 4,$
$x_1 - 2x_2 \geq -4,$
$x_1 + x_2 \geq 4,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

19. $2x_1 - x_2 \to max,$
$x_1 - x_2 \geq -3,$
$6x_1 + 7x_2 \leq 42,$
$3x_1 - 2x_2 \leq 6,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

20. $2x_1 - 4x_2 \to min,$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16,$
$x_1 + 3x_2 \geq 2,$
$2x_1 + 7x_2 \geq 9,$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Мурзакматов М.У., Исабеков К.А.

Сызыктуу программалоо маселелерин симплекс - метод менен чыгаруу

«Колдонмо математика жана информатика» адистигинин студенттери үчүн методикалык колдонмо

Тех. редактор: Жакыпова Ч.А.
Компьютердик калыпка салган: Жумашева Ж.Ж., Донoнбаева Д.А.

К.Тыныстанов атындагы ЫМУнун
полиграфиялык комплексинде басылды.
Заказ 323. Нускасы 50 даана.
Тел. 52696